Università di Pisa
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Dipartimento di Fisica

Interazioni efficaci generate dalle anomalie chirali

Tesi di Laurea Specialistica

Relatore: Chiar.mo Prof. Enore Guadagnini

Alessandro Zucca

Università di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Specialistica in Scienze Fisiche

Interazioni efficaci generate dalle anomalie chirali

Tesi di Laurea di:

Alessandro Zucca

Relatore:

Prof. Enore Guadagnini ....

Candidato:

Alessandro Zucca ....

Sessione di Laurea 22 Settembre 2009
Anno Accademico 2008-2009

Indice

CAPITOLO 1

Introduzione

Una delle differenze più rilevanti che sussiste fra le teorie di campo classiche e quelle quantistiche è la possibilità di evadere il secondo teorema di Noether; in particolare, per teorie di gauge, il processo di rinormalizzazione può rompere l'invarianza di gauge e quindi invalidare le leggi di conservazione delle correnti di Noether: una teoria con queste caratteristiche si dice *anomala*. Più precisamente, nel caso di simmetrie di gauge chirali, che distinguono le parti left e right dei campi spinoriali accoppiati ai campi di gauge, può risultare impossibile definire un funzionale d'azione rinormalizzato ad un loop gauge invariante: in questo caso si parla di *anomalie chirali*.

La lagrangiana del Modello Standard, nel limite di massa nulla per i quark leggeri (up, down e strange), è invariante sotto il gruppo di chirale (di flavor) $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$. Introducendo campi vettoriali classici accoppiati alle correnti del gruppo $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$ è possibile rendere la lagrangiana invariante sotto l'azione locale del gruppo chirale di flavor; ma tale teoria non può essere rinormalizzata in maniera gauge invariante: sono presenti anomalie (chirali) relative al gruppo di flavor. Si può invece dimostrare che il gruppo di gauge del Modello Standard, $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ non è anomalo, e quindi non ci sono ostruzioni al processo di rinormalizzazione. In questo lavoro, dopo aver introdotto le anomalie e la loro struttura, discuteremo le conseguenze della loro esistenza sui processi fisici tra le particelle.

I legami fra i processi adronici e le anomalie chirali sono stati oggetto di molti lavori, soprattutto negli anni '70 e '80 [18, 34]. Per descrivere gli effetti delle anomalie nei processi adronici di bassa energia si utilizza il metodo delle lagrangiane fenomenologiche, che sfruttano la rottura spontanea della simmetria chirale, e quindi l'esistenza di bosoni di Goldstone, che vengono identificati con l'ottetto dei mesoni pseudoscalari fondamentali. Le lagrangiane fenomenologiche vengono utilizzate per costruire un funzionale di azione che approssimi, a bassa energia, quello della teoria fondamentale. Tale funzionale deve avere le stesse simmetrie della teoria fondamentale e, inoltre, deve riprodurre fedelmente le anomalie: per questo motivo si scriverà come somma di una parte invariante di gauge più una parte, detta *funzionale di Wess–Zumino* [34], la cui variazione restituisce correttamente le anomalie chirali. Quest'ultimo termine descrive gli effetti delle anomalie sui processi adronici; ad esempio attraverso questo metodo si è mostrato come l'anomalia chirale sia responsabile della differenza tra il dato sperimentale e le previsioni PCAC per l'ampiezza di decadimento del processo $\pi^0 \to \gamma\gamma$; il risultato che si ottiene è in ottimo accordo coi dati sperimentali.

Il funzionale di Wess–Zumino dipende dai campi di gauge e dai campi dei mesoni pseudoscalari, e quindi contribuisce a processi in cui sono coinvolti questi soli campi. In questo lavoro siamo interessati alla possibilità di estendere lo studio delle conseguenze delle anomalie includendo i mesoni vettoriali. L'esistenza di effetti importanti legati alle anomalie chirali nella dinamica dei mesoni vettoriali è stata affrontata più volte in letteratura; il primo esempio risale al lavoro di Kaymackalan et al. del 1984 [18] e l'argomento è stato successivamente ripreso, anche recentemente [12, 13]. Alla base di tutti i lavori vi è l'idea che il fatto che la corrente elettromagnetica sia dominata dai mesoni vettoriali (nota come ipotesi di Vector Meson Dominance) porti all'introduzione di un funzionale analogo al funzionale di Wess–Zumino nel quale i campi di gauge – o una parte di essi – sono sostituiti dai mesoni vettoriali. Seguendo le stesse considerazioni proponiamo di sfruttare una costruzione sviluppata da Mañes, Stora e Zumino [25], che segue da un approccio algebrico al problema, legato alla simmetria BRS e alla sua interpretazione geometrica; nel lavoro riassumeremo i metodi utilizzati e i risultati ottenuti.

Discuteremo quindi gli aspetti generali del legame fra le anomalie e i processi adronici a bassa energia, concentrandoci in seguito sui mesoni vettoriali e studiando i risultati che si ottengono utilizzando il funzionale di Wess–Zumino con l'opportuna introduzione dei mesoni vettoriali. Il punto di partenza rimane l'osservazione empirica del legame fra le correnti di flavor e i mesoni vettoriali. Il metodo utilizzato per studiare tali aspetti sarà quello delle teorie effettive di campo: in particolare introdurremo il formalismo proposto Callan, Coleman, Wess e Zumino [4, 5] e discuteremo l'implementazione della VMD in tale framework. Mostreremo poi come la presenza del funzionale di Wess–Zumino modifichi le correnti di flavor, e sia quindi necessario introdurre nuovi termini nell'azione efficace per ripristinare la condizione di Vector Meson Dominance: la costruzione di Mañes, Stora e Zumino permetterà di ottenere in modo diretto tali termini.

Il lavoro è strutturato nel modo seguente: il capitolo 2 è dedicato ad una breve discussione delle anomalie in teorie di campo e al calcolo dell'anomalia chirale, con particolare attenzione al caso del Modello Standard nell'approssimazione di massa zero per i quark leggeri $(u\ , d\ , s)$. Inoltre saranno discusse le equazioni di consistenza di Wess–Zumino [34], che permisero di mostrare che il calcolo di Bardeen per l'anomalia chirale [2] era esatto, e consentono di studiare le anomalie con metodi algebrici e geometrici.

Nel capitolo 3 riassumiamo i risultati ottenuti da Mañes, Stora e Zumino [24, 25, 36, 37] grazie all'utilizzo di tecniche di geometria differenziale; il risultato principale è costituito dalle cosiddette *descent equations*, che permettono di legare le anomalie alla coomologia BRS e le cui soluzioni soddisfano automaticamente le equazioni di consistenza di Wess–Zumino; questo fornisce, come vedremo, un metodo efficiente e molto generale per il calcolo e lo studio delle anomalie.

Il capitolo 4 è dedicato poi alla teorie di campo efficaci, e viene discusso in particolare il formalismo proposto da Callan, Coleman, Wess e Zumino [5, 4], la cui costruzione origina dalla rottura spontanea di simmetria ed è quindi particolarmente indicato per lo studio della dinamica dei bosoni di Goldstone. Nell'ultima parte del capitolo mostreremo l'applicazione del metodo CCWZ alla simmetria chirale per descrivere la dinamica dei mesoni pseudoscalari fondamentali; seguiranno alcune piccole applicazioni alla dinamica di altre particelle, come i nucleoni e i mesoni vettoriali.

Gli ultimi due capitoli sono dedicati all'applicazione di quanto discusso in precedenza alla fisica adronica. Il capitolo 5 è diviso in due parti; nella prima viene costruito il funzionale di Wess–Zumino, che viene successivamente esteso al caso in cui sia presente una connessione di background, seguendo quanto fatto da Mañes, Stora e Zumino [25]. Nella seconda parte ci occupiamo invece del ruolo dei mesoni vettoriali nella teoria effettiva. In particolare viene discusso un possibile metodo per introdurre termini di interazione che coinvolgono i mesoni vettoriali legati alle anomalie chirali; il metodo è legato all'ipotesi di Vector Meson Dominance, nella formulazione utilizzata da Lee e Zumino [21], che viene brevemente discussa nello stesso capitolo.

Nel capitolo 6 studieremo invece le conseguenze che l'introduzione del funzionale costruito nel capitolo 5 ha sui processi adronici. In particolare calcoleremo le larghezze di decadimento del processo $\pi^0 \to \gamma\gamma$ e dei decadimenti principali del mesone ω.

Nel corso del lavoro utilizzeremo diversi strumenti di algebra e geometria differenziale: per non appesantire la discussione, la trattazione di alcuni di essi è stata rimandata alle appendici. In particolare nell'Appendice A discuteremo la struttura delle forme differenziali a valori in un algebra di Lie, le classi caratteristiche associate a un fibrato principale e la definizione di derivate covarianti su fibrati associati. L'Appendice B è invece dedicata ad alcuni strumenti utilizzati per costruire la coomologia BRS e ricavare le descent equations.

1.1 Convenzioni e notazioni

Prima di iniziare, alcune precisazioni sulle convenzioni e le notazioni adottate nel resto di questo lavoro.

- Lo spazio–tempo è assunto in genere essere $\mathbb{R}^4$ con la metrica di Minkowski. Quando la discussione non dipende dalla dimensione dello spazio tempo assumeremo generalmente di lavorare con $\mathbb{R}^{2n}$ con metrica di Minkowski; inoltre risulterà talvolta comodo supporre di poter compattificare $\mathbb{R}^{2n}$ a S^{2n}, con la metrica pseudo–Riemanniana indotta.

- Per la metrica di Minkowski adottiamo la convenzione $(\eta_{ij}) = \mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1)$.

- Quando si parlerà di *mappe* fra varietà differenziabili si intenderanno applicazioni C^∞.

- Gli indici relativi alle coordinate dello spazio–tempo saranno indicati con lettere greche $(\mu, \nu, \rho \ldots)$; quelli relativi agli altri numeri quantici (in particolare ai generatori dei gruppi di Lie) con lettere latine $(a, b, c \ldots)$.

- Per i tensori di Levi–Civita $\varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots}$ adottiamo la seguente convenzione:
$$\varepsilon^{012\ldots} = 1.$$

- Per i generatori di $SU(N)$ adottiamo la seguente normalizzazione:
$$\mathrm{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}.$$

1.2 Richiami di teorie di gauge

Concludiamo questa parte introduttiva con alcuni richiami sulle teorie di gauge: in particolare, dato che sarà largamente usata in questo lavoro, ne ricordiamo la descrizione geometrica.

Una teoria di gauge è una teoria di campo invariante sotto l'azione locale di un gruppo topologico G. Si suppone generalmente che G sia un gruppo di Lie; in seguito assumiamo inoltre che sia semisemplice e compatto (avendo in mente $SU(N)$). In termini più formali una teoria di gauge è formulata a partire da un fibrato G–principale $P(X, G)$ sullo spazio–tempo X; i campi di gauge sono descritti da connessioni su P, e i campi di materia da sezioni di fibrati associati[1] a P. In questa breve introduzione non discuteremo i dettagli della costruzione: ci limiteremo alle definizioni ed ai risultati principali, in modo da precisare le convenzioni utilizzate nel resto del lavoro. Un'esposizione più dettagliata si può trovare, ad esempio, in [19].

Definizione 1.1. *Un* fibrato G–principale *su X (detto* base *del fibrato) è il dato di una varietà P e di un'azione a destra di G su P, $\rho : P \times G \to P$ che indicheremo semplicemente con $(p, g) \mapsto pg$, tale che:*

(i) *l'azione ρ è libera;*

(ii) *X è lo spazio quoziente di P rispetto all'azione di G, $X = P/G$, e la proiezione $\pi : P \to X$ è liscia;*

(iii) *P è localmente banale: $\forall x \in X$ $\exists U$ intorno aperto di x tale che $\pi^{-1}(U)$ è isomorfo[2] a $U \times G$.*

Il gruppo G è detto gruppo strutturale *del fibrato.*

Definizione 1.2. *Una famiglia $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ si dice un* sistema di banalizzazioni locali *di $P(X, G)$ se $\{U_\alpha\}$ è un ricoprimento aperto di X, le ϕ_α sono mappe da U_α in P e per ogni α, β tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ esiste una mappa $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ tale che $\phi_\alpha(x) = \phi_\beta(x)\psi_{\alpha\beta}(x)$. Le $\psi_{\alpha\beta}$ sono dette* funzioni di transizione.

Abbiamo definito i fibrati principali; ora vogliamo definire le applicazioni fra essi:

Definizione 1.3. *Un* omomorfismo *fra due fibrati principali $P'(X', G')$ e $P(X, G)$ è il dato di due mappe, $f' : P' \to P$ e $f'' : G' \to G$, tali che $f'(p'g') = f'(p')f''(g')$ per*

[1] Si veda l'Appendice A.

[2] Cioè esiste $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ tale che $\phi(p) = (\pi(p), \varphi(p))$ con $\varphi : \pi^{-1}(U) \to G$ equivariante, cioè $\varphi(pg) = \varphi(p)g \;\; \forall p \in \pi^{-1}(U),\; g \in G$.

ogni $p' \in P'$, $g' \in G'$. *In seguito indicheremo sia* f' *che* f'' *con* f.
Un omomorfismo biettivo è detto isomorfismo.

Definizione 1.4. *Un* automorfismo *di* $P(X, G)$ *è un omomorfismo* f *da* P *in se stesso tale che* $f : P \to P$ *è un diffeomorfismo e* $f : G \to G$ *è l'identità su* G.

Definizione 1.5. *L'insieme degli automorfismi di un fibrato* $P(X, G)$ *che si riducono all'identità sulla base* X *è il* gruppo delle trasformazioni di gauge *e sarà indicato con* $\mathcal{G} \equiv \mathrm{Aut}\, P$.

Proposizione 1.6. $\mathcal{G}$ *è isomorfo a* $\mathrm{Map}_G(P, G) \equiv \{\varphi : P \to G \ \text{ equivarianti}\}$, *dove l'azione su* G *è l'azione aggiunta:* $g_0 \mapsto g^{-1} g_0 g$.

1.2.1 Connessioni su fibrati principali

Nella formulazione delle teorie di gauge che utilizza i fibrati principali i campi di gauge non sono altro che la descrizione in coordinate locali di connessioni sul fibrato $P(X, G)$. Si può vedere una connessione come un modo per "separare" il tangente in un punto di P in una componente *orizzontale*, associata al tangente dello spazio tempo, e in una *verticale*, identificata con il tangente al gruppo G, cioè con la sua algebra di Lie $\mathfrak{g}$; se per ogni $p \in P$ denotiamo allora con G_p il tangente alla fibra in p, e con $\rho_g : P \to P$ l'azione a destra di $g \in G$, possiamo dare la seguente definizione:

Definizione 1.7. *Una connessione* A *su* P *è un'associazione* C^∞ $p \mapsto H_p \subset T_p P$ *tale che:*

(i) $T_p P = H_p \oplus G_p$;

(ii) $H_{pg} = (\rho_g)_* H_p$ *per ogni* $p \in P$, $g \in G$.

H_p *è detto* sottospazio orizzontale *di* $T_p P$, G_p sottospazio verticale. *Le proiezioni sulle due componenti saranno indicate rispettivamente con* $\mathrm{hor}(\cdot)$ *e* $\mathrm{ver}(\cdot)$.

Ad ogni connessione su un fibrato principale $P(X, G)$ si può associare una forma di connessione[3], il che permette di recuperare l'usuale descrizione in termini di un potenziale di gauge A_μ: per ogni $v \in T_p P$ definiamo $\omega(v)$ l'unico elemento $Y \in \mathfrak{g}$ tale che $Y^*_p = v$, dove Y^* è il campo vettoriale su P associato a v grazie all'omomorfismo indotto dall'azione di G su P che associa a elementi dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ campi vettoriali su P; Y^* è detto *campo vettoriale fondamentale associato a* v. ω così costruita è detta *forma di connessione*.

[3]Cioè una 1–forma a valori in $\mathfrak{g}$; si veda l'Appendice A per la definizione e le convenzioni adottate in questo lavoro.

Proposizione 1.8. *Proprietà della forma di connessione:*

(i) $\omega(Y^*) = Y \;\; \forall Y \in \mathfrak{g}$;

(ii) $(\rho_g)_* \omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \omega$ *per ogni* $g \in G$.

Per ritrovare il potenziale di gauge A_μ è necessario ancora qualche passaggio: la proiezione $\pi : P \to X$ induce un isomorfismo $\pi_* : H_p \to T_{\pi(p)}X$; inoltre:

Proposizione 1.9. *Esiste unico il sollevamento orizzontale di un campo vettoriale* v *su* X.

Quindi è ben definita ω come 1–forma su M; allora, se $\{x_\mu\}$ è un insieme di coordinate per X, possiamo definire

$$A_\mu \equiv \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)$$

che è il potenziale di gauge (a valori in $\mathfrak{g}$). La legge di trasformazione di A_μ discende dalla proposizione 1.8 ed è quella usuale:

$$A'_\mu = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} A_\mu + g^{-1} \partial_\mu g$$

dove $g(x)$ è la mappa associata alla trasformazione di gauge, grazie alla proposizione 1.6

Rimane da definire la *field strenght* del campo di gauge; questa non è altro che la curvatura della connessione A. In termini della forma differenziale ω la curvatura è data dalla 2–forma

$$F = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]. \tag{1.1}$$

La (1.1) è anche detta *equazione di struttura* per la connessione A.

CAPITOLO 2

Anomalie chirali

Consideriamo una teoria di campo descritta da una densità lagrangiana $\mathscr{L}(x)$ e supponiamo che l'azione $S \equiv \int \mathscr{L}(x) d^4x$ sia invariante sotto l'azione di un gruppo di gauge $\mathcal{G}$, costituito dagli automorfismi di un fibrato G–principale sullo spazio–tempo ($\mathbb{R}^4$ con la metrica di Minkowski) con G un gruppo di Lie finito dimensionale. Classicamente, allora, per il secondo teorema di Noether a ogni generatore T_a di G ($T_a \in \mathfrak{g} \equiv \mathrm{Lie}(G)$) corrisponde una corrente conservata $J_a^\mu(x)$.

In teoria quantistica dei campi, invece, questo non è sempre vero: il processo di rinormalizzazione della teoria può, in alcuni casi, invalidare la legge di conservazione $\partial_\mu J_a^\mu = 0$: in tal caso la teoria si dice *anomala*. Le *anomalie chirali*, su cui ci concentreremo in questa esposizione, sono quelle associate al gruppo di simmetria di flavor $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$ del Modello Standard (o ad alcuni suoi sottogruppi).

2.1 Anomalie in QFT

Considereremo, in questa sezione come nelle successive, teorie di campo rinormalizzabili formulate tramite integrale funzionale. Supporremo inoltre che tali teorie siano il dato di una densità lagrangiana $\mathscr{L}$ e quindi di un funzionale d'azione $S[\phi]$ (dove con ϕ indichiamo l'insieme dei campi della teoria) invariante sotto un gruppo continuo di trasformazioni, la cui azione sui campi sarà indicata genericamente con:

$$\phi(x) \to \phi(x) + \Delta\phi(x).$$

Una tale teoria è univocamente fissata dal funzionale rinormalizzato di azione efficace $\Gamma[\phi]$. Tale funzionale si può scrivere sotto forma di serie, il cui termine n-esimo è il contributo dato dai diagrammi 1PI a n loop:

$$\Gamma[\phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n[\phi] = \frac{1}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \Gamma_n[\phi].$$

Il primo termine, cioè la somma dei diagrammi ad albero, è uguale al funzionale d'azione classico; come prima conseguenza abbiamo allora che le anomalie non possono presentarsi a livello albero, in quanto l'azione classica è invariante. Eventuali comportamenti anomali vanno quindi cercati ad ordini superiori; in particolare le anomalie chirali si presentano a livello 1-loop. Consideriamo quindi il contributo dato dai diagrammi 1PI ad un loop:

$$\Gamma_1[\phi] = \lim_{\varepsilon \to 0} \Gamma_\varepsilon[\phi] - \Gamma_{ct}[\phi],$$

dove $\Gamma_\varepsilon[\phi]$ è il funzionale regolarizzato con un opportuno cut-off e $\Gamma_{ct}[\phi]$ è l'insieme dei controtermini che rendono convergente il limite.

Quello a cui siamo interessati è la variazione del funzionale di azione efficace (nel nostro caso, più precisamente, quella del contributo ad un loop); definiamo quindi

$$\mathscr{A}[\phi] \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \int d^4x \frac{\delta \Gamma_\varepsilon[\phi]}{\delta \phi(x)} \Delta\phi(x).$$

La teoria si dirà *anomala* se il funzionale $\mathscr{A}$ non è *integrabile*, se non esiste cioè un funzionale locale dei campi $\mathscr{B}[\phi]$ tale che

$$\Delta\mathscr{B}[\phi] \equiv \int d^4x \frac{\delta \mathscr{B}[\phi]}{\delta \phi(x)} \Delta\phi(x) = \mathscr{A}[\phi].$$

In caso contrario, infatti, l'anomalia si potrebbe cancellare sottraendo $\mathscr{B}$ al funzionale regolarizzato. Quindi se una simmetria è anomala, tale anomalia non può, per definizione, essere cancellata tramite la ridefinizione delle costanti di rinormalizzazione o l'introduzione di controtermini locali; d'altra parte, però, la forma stessa dell'anomalia non sarà, in generale, univoca, dato che è definita a meno di funzionali integrabili. Quando si vorranno studiare eventuali effetti legati alla presenza di anomalie occorrerà allora fissare una forma per l'anomalia (anche se in modo non del tutto arbitrario, dato che, come vedremo, deve soddisfare determinate equazioni legate alla struttura di gruppo delle trasformazioni) e assicurarsi che le previsioni fisiche non dipendano dalla particolare scelta effettuata.

2.2 Modello di gauge chirale

Introduciamo ora il modello di gauge chirale; consideriamo N spinori a massa nulla e chiralità definita (N spinori left o N spinori right) che indicheremo globalmente con Ψ. Supponiamo inoltre di avere definita una rappresentazione unitaria di un gruppo di Lie G finito dimensionale (i cui generatori saranno indicati con T^a): una trasformazione di parametro θ sarà data da

$$\Psi_i(x) \to \Psi_i'(x) = (e^{i\theta^a R^a})_{ij}\Psi_j(x),$$

dove gli R^a sono i rappresentanti dei generatori del gruppo. Promuoviamo ora la simmetria globale a simmetria locale, introducendo campi di gauge classici $A_\mu^a(x)$; l'azione (gauge invariante) che descrive la teoria sarà allora (nel caso di spinori left):

$$S = \int d^4x\ \Psi_i^\dagger(x)\overline{\sigma}^\mu(\delta_{ij}\partial_\mu + iA_\mu^a(x)R_{ij}^a)\Psi_j(x) = \int d^4x\ \Psi^\dagger(x)i\overline{\sigma}^\mu D_\mu\Psi(x).$$

2.2.1 Relazione con il Modello Standard

Consideriamo ora un caso particolare del modello di gauge chirale, cioè quello in cui sono presenti N spinori left ed N spinori right: li raggruppiamo in un unico vettore di campi $\Psi(x)$. La teoria libera è chiaramente invariante sotto il gruppo di gauge globale[1] $G = SU(N)_R \otimes SU(N)_L$. Promuoviamo ora G (o un suo sottogruppo) a gruppo di gauge locale introducendo i campi di gauge classici L_μ, R_μ. La densità lagrangiana della teoria fondamentale sarà allora:

$$\mathscr{L} = \overline{\Psi}i\not{D}\Psi,$$

dove D_μ è la derivata covariante.

Il caso appena esposto è di particolare rilevanza in fisica delle particelle: consideriamo infatti la teoria delle interazioni elettrodeboli all'interno del Modello Standard: si tratta di una teoria di gauge con gruppo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, che può essere visto come sottogruppo di $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$, e nel limite di massa zero per i quark leggeri (u, s, d), il Modello Standard è invariante sotto l'azione del gruppo di flavor

[1] In realtà la teoria è invariante sotto $U(N) \otimes U(N)$; ci limitiamo però ad $SU(N) \otimes SU(N)$ per non avere fattori $U(1)$. In ogni caso la gran parte dei risultati ottenuti rimane valida anche per il caso $U(N) \otimes U(N)$.

$SU(3)_R \otimes SU(3)_L$. I risultati sull'anomalia chirale, che presenteremo più avanti, si applicano allora (in particolare) al settore elettrodebole del Modello Standard.

Come vedremo in seguito, inoltre, il fatto che la simmetria di flavor del Modello Standard sia rotta spontaneamente (al sottogruppo vettoriale) è rilevante ai fini dello studio delle conseguenze fenomenologiche delle anomalie chirali: i bosoni di Goldstone associati a tale pattern di rottura possono essere identificati con i mesoni pseudoscalari e, a livello di lagrangiana effettiva, la presenza dell'anomalia determina la comparsa di interazioni fra i mesoni e i campi di gauge.

Un'ultima osservazione: una teoria di gauge, per essere rinormalizzabile, deve essere libera da anomalie; questo rimane vero per il Modello Standard: l'anomalia legata al gruppo di gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ presente nel settore adronico viene esattamente cancellata da quella relativa al settore leptonico. Mostreremo in seguito come avviene la cancellazione.

2.3 Calcolo dell'anomalia chirale

Il calcolo dell'anomalia chirale non abeliana è stato fatto per la prima volta da Bardeen [2] nel 1969, utilizzando il point–splitting come metodo di regolarizzazione. Di seguito proponiamo un metodo alternativo (anch'esso largamente utilizzato in letteratura, si veda ad esempio [10]) che utilizza la regolarizzazione di tempo proprio di Schwinger [27].

Prima di procedere al calcolo dell'anomalia chirale è conveniente riscrivere il funzionale di azione effettiva in una forma più facilmente utilizzabile per il nostro scopo. Consideriamo allora una generica teoria di N spinori di Dirac massless la cui dinamica è determinata dalla (generica) azione

$$S = \int d^4x \overline{\Psi}(i\partial\!\!\!/ + \Delta)\Psi \equiv S_0 + S_I$$

dove Δ è un termine di interazione che dipende solo da campi esterni.

Una nota prima di proseguire: le manipolazioni che faremo saranno puramente formali, dato che non abbiamo ancora introdotto alcuna procedura di regolarizzazione e rinormalizzazione del funzionale di azione effettiva; questo sarà fatto più avanti, prima di procedere al calcolo esplicito dell'anomalia chirale.

Torniamo al funzionale di azione effettiva: per definizione abbiamo:

$$i\,\Gamma[\Delta] = \left\langle e^{iS_I} \right\rangle^c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left\langle S_I^n \right\rangle^c . \tag{2.1}$$

Come osservato in precedenza, a livello albero non ci sono problemi: la teoria è invariante; inoltre il contributo di ordine zero non dipende da Δ. Dato che gli unici campi quantistici della teoria sono gli spinori, i grafici di Feynman che contribuiscono sono allora tutti e soli i grafici 1-loop 1PI. Per calcolarli, osserviamo subito che ogni contrazione di Wick dei campi fermionici induce un propagatore di Feynman della forma

$$\underbrace{\Psi_\alpha(x)\overline{\Psi}_\beta(y)} = iS_{\alpha\beta}(x-y)$$

con $S_{\alpha\beta}$ che soddisfa l'equazione

$$i\gamma^\mu_{\alpha\sigma}\partial_\mu S_{\sigma\beta}(x-y) = i\partial\!\!\!/_{\alpha\sigma} S_{\sigma\beta}(x-y) = \delta_{\alpha\beta}\delta^{(4)}(x-y).$$

Ad ogni propagatore corrisponde quindi un termine $\sim \frac{1}{i\partial\!\!\!/}$; dato che ad ogni loop fermionico è associata un'operazione di traccia (sia sugli indici spaziali che su quelli spinoriali), usando la (2.1) otteniamo allora:

$$i\,\Gamma[\Delta] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \mathrm{Tr} \left(\frac{1}{i\partial\!\!\!/} \Delta \right)^n = \mathrm{Tr}\log\left(1 + \frac{1}{i\partial\!\!\!/}\Delta\right). \tag{2.2}$$

Riprendiamo ora il modello chirale introdotto nel paragrafo precedente. Supponiamo per semplicità di avere N spinori left. Usando la (2.2), e osservando che nel caso del modello chirale $\Delta = \overline{\sigma}^\mu A_\mu$, possiamo riscrivere il funzionale di azione effettiva nella forma:

$$\Gamma[A_\mu] = -i\ \mathrm{Tr}\log(\overline{\sigma}^\mu(\partial_\mu + iA_\mu)),$$

dove, rispetto alla (2.2), abbiamo sommato la costante $\mathrm{Tr}\log\ i\partial\!\!\!/$. Sommando ora $-i\mathrm{Tr}\log(\sigma^\nu\partial_\nu)$ (che è indipendente dai campi di gauge, e quindi non modifica il funzionale di azione se non per un termine costante) otteniamo allora:

$$\Gamma[A_\mu] = -i\ \mathrm{Tr}\log(\sigma^\nu\partial_\nu\overline{\sigma}^\mu(\partial_\mu + iA_\mu)) = -i\ \mathrm{Tr}\log(\partial\overline{D}). \tag{2.3}$$

dove $\partial \equiv \sigma_\mu\partial^\mu$ e $\overline{D} \equiv \overline{\sigma}_\mu D^\mu$. Il funzionale che abbiamo scritto non è ben definito, poiché alcuni diagrammi di Feynman sono divergenti. Per dare senso alla formula

(2.3) utilizziamo la *regolarizzazione di tempo proprio* di Schwinger: definiamo

$$\Gamma_\varepsilon[A_\mu] = i \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{ds}{s} \mathrm{Tr}\left[e^{-s\partial\overline{D}}\right].$$

Possiamo ora calcolare la variazione del funzionale regolarizzato per una trasformazione di gauge infinitesima di parametro $\theta(x)$:

$$\begin{aligned}\delta_\theta\Gamma_\varepsilon = i \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{ds}{s}\delta_\theta \mathrm{Tr}\left[e^{-s\partial\overline{D}}\right] &= \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{ds}{s} \mathrm{Tr}\left[e^{-s\overline{\partial}D}\left(-s\overline{\partial}\right) i[\theta, D]\right] \\ = \int_\varepsilon^{+\infty} ds\ \mathrm{Tr}\left[e^{-s\overline{\partial}D}\left(\overline{\partial}\theta D - \overline{\partial}D\theta\right)\right] &= \mathrm{Tr}\left[\theta\left(e^{-\varepsilon D\overline{\partial}} - e^{-\varepsilon\overline{\partial}D}\right)\right].\end{aligned} \tag{2.4}$$

Ci interessano solo i termini che non vanno a zero per $\varepsilon \to 0$: passando in rappresentazione degli impulsi e sviluppando l'esponenziale[2] si nota che contribuiscono solo i termini fino al quarto ordine[3]; in realtà portando avanti i calcoli si nota che anche il quarto ordine non contribuisce. Possiamo quindi limitarci ai primi tre ordini dello sviluppo; risulta:

$$\begin{aligned}\delta_\theta\Gamma_\varepsilon[A_\mu] = \frac{1}{48\pi^2} &\int d^4x\ \mathrm{Tr}\left[\partial_\mu\theta\left(\frac{6}{\varepsilon}A^\mu - \partial^2 A^\mu\right)\right] \\ + \frac{i}{24\pi^2} &\int d^4x\ \mathrm{Tr}\left[\partial_\mu\theta\left(\partial_\nu A^\nu A^\mu - A^\mu\partial_\nu A^\nu\right)\right] \\ + \frac{i}{48\pi^2} &\int d^4x\ \mathrm{Tr}\left[\partial_\mu\theta\left(A_\nu\partial^\mu A^\nu - \partial^\mu A_\nu A^\nu\right)\right] \\ + \frac{1}{48\pi^2} &\int d^4x\ \mathrm{Tr}\left[\partial_\mu\theta\left(A^\mu A^\nu A_\nu - A_\nu A^\mu A^\nu + A_\nu A^\nu A^\mu\right)\right] \\ + \frac{1}{24\pi^2} &\int d^4x\ \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}\ \mathrm{Tr}\left[\partial_\mu\theta\left(A_\nu\partial_\tau A_\lambda + \frac{i}{2}A_\nu A_\tau A_\lambda\right)\right].\end{aligned} \tag{2.5}$$

Dobbiamo eliminare le divergenze presenti nella (2.5); e se possibile eliminare anche i termini finiti, per cercare di rendere gauge invariante la teoria. Consideriamo

[2] Si utilizza la seguente formula per lo sviluppo dell'esponenziale:

$$\begin{aligned}e^{X+Y} = e^X &+ \int_0^1 du\ e^{(1-u)X} Y e^{uX} + \int_0^1 u\ du \int_0^1 dv\ e^{(1-u)X} Y e^{u(1-v)X} Y e^{uvX} \\ &+ \int_0^1 u^2 du \int_0^1 v\ dv \int_0^1 dt\ e^{(1-u)X} Y e^{u(1-v)X} Y e^{uv(1-t)X} Y e^{uvtX} + \ldots\end{aligned}$$

[3] Per fare le cose in modo rigoroso si dovrebbe considerare lo spazio degli impulsi come euclideo, e ricostruire poi il risultato attraverso prolungamento analitico

quindi il funzionale locale

$$\begin{aligned}\Gamma_{ct}[A_\mu,\varepsilon] = &\frac{1}{16\pi^2\varepsilon}\int d^4x\ \mathrm{Tr}(A_\mu A^\mu)\\ &+\frac{1}{96\pi^2}\int d^4x\ \mathrm{Tr}(2\partial^\mu A_\mu \partial^\nu A_\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu)\\ &+\frac{1}{192\pi^2}\int d^4x\ \mathrm{Tr}(2A^\mu A_\mu A^\nu A_\nu - A_\mu A_\nu A^\mu A^\nu).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Allora, definendo il nuovo funzionale regolarizzato come

$$\Gamma[A_\mu] = \Gamma_\varepsilon[A_\mu] + \Gamma_{ct}[A_\mu,\varepsilon],$$

abbiamo:

$$\delta\Gamma[A_\mu] = \frac{1}{24\pi^2}\int d^4x\ \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}\ \mathrm{Tr}\left[\partial_\mu\theta\left(A_\nu\partial_\tau A_\lambda + \frac{i}{2}A_\nu A_\tau A_\lambda\right)\right]. \tag{2.7}$$

Questa è la *forma minimale* dell'*anomalia chirale* per spinori left: infatti non può essere cancellata con l'introduzione di ulteriori controtermini. Quindi, in generale (per alcuni particolari gruppi, o meglio, per alcune loro particolari rappresentazioni, la (2.7) può essere identicamente nulla) il modello chirale di gauge è anomalo.

Analogamente si può ricavare la forma dell'anomalia per spinori right, che risulta uguale a quella per spinori left ma con segno opposto.

L'ultima cosa che vogliamo sottolineare in questo paragrafo è la possibilità di riscrivere l'anomalia chirale in una forma che evidenzi la dipendenza dalla rappresentazione del gruppo di gauge: infatti utilizzando le regole di commutazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ possiamo riscrivere la (2.7) come

$$\delta\Gamma[A_\mu] = \frac{d^{abc}}{48\pi^2}\int d^4x\ \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}\ \left[\partial_\mu\theta^a\left(A^b_\nu\partial_\tau A^c_\lambda - \frac{1}{4}f^{cde}A^b_\nu A^d_\tau A^e_\lambda\right)\right], \tag{2.8}$$

dove $d^{abc} = \mathrm{Tr}(R^a\{R^b,R^c\})$ con R^i rappresentanti dei generatori T^i di $\mathfrak{g}$.

Osservazione 2.1. Il fatto che l'anomalia sia proporzionale al tensore d^{abc} dà un criterio generale per determinare se una data rappresentazione dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è libera da anomalie. In particolare questo accade nel caso la rappresentazione sia reale ($d^{abc}=0$ segue da $d^{abc} = -\overline{d}^{abc}$, dove $\overline{d}^{abc} = \mathrm{Tr}(\overline{R}^a\{\overline{R}^b,\overline{R}^c\})$).

Corollario 2.2. Il sottogruppo diagonale $SU(N)_V$ del gruppo chirale $SU(N)_R \otimes SU(N)_L$ è libero da anomalie.

2.3.1 Teoria di gauge $SU(N)_R \otimes SU(N)_L$

Come nel paragrafo precedente studiamo ora un caso particolare del modello di gauge chirale, quello che meglio si adatta a descrivere alcuni aspetti del Modello Standard: consideriamo N spinori left ed N spinori right accoppiati ai campi di gauge classici L_μ e R_μ relativi al gruppo di gauge $SU(N)_R \otimes SU(N)_L$. Il risultato precedente (2.7) si generalizza subito: anche questa teoria è anomala, e la variazione del funzionale d'azione effettiva si può scrivere nella forma (minimale) *left–right simmetrica*

$$\begin{aligned}\delta\Gamma[L_\mu, R_\mu] = & \frac{1}{24\pi^2}\int d^4x\, \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}\,\mathrm{Tr}\left[\partial_\mu\theta_L\left(L_\nu\partial_\tau L_\lambda + \frac{i}{2}L_\nu L_\tau L_\lambda\right)\right] \\ & - \frac{1}{24\pi^2}\int d^4x\, \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}\,\mathrm{Tr}\left[\partial_\mu\theta_R\left(R_\nu\partial_\tau R_\lambda + \frac{i}{2}R_\nu R_\tau R_\lambda\right)\right].\end{aligned} \tag{2.9}$$

Ora, per il corollario 2.2, il sottogruppo diagonale $SU(N)_V$ è libero da anomalie. Questo non è evidente dalla (2.9); possiamo però passare alla forma *vettoriale–assiale* dell'anomalia chirale: una trasformazione vettoriale corrisponde a $\theta_L(x) = \theta_R(x) \equiv \alpha(x)$, mentre una trasformazione assiale a $\theta_R(x) = -\theta_L(x) \equiv \beta(x)$. Le variazioni del funzionale Γ, ottenuto con i controtermini calcolati precedentemente (quello cioè la cui variazione è data dalla precedente formula (2.9)) sono allora rispettivamente

$$\begin{aligned}\delta_V\Gamma[L_\mu, R_\mu] = \frac{1}{24\pi^2}\int d^4x\, \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}\,\mathrm{Tr}\Big[\partial_\mu\alpha\Big(& L_\nu\partial_\tau L_\lambda - R_\nu\partial_\tau R_\lambda \\ & + \frac{i}{2}L_\nu L_\tau L_\lambda - \frac{i}{2}R_\nu R_\tau R_\lambda\Big)\Big],\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\delta_A\Gamma[L_\mu, R_\mu] = -\frac{1}{24\pi^2}\int d^4x\, \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}\,\mathrm{Tr}\Big[\partial_\mu\beta\Big(& L_\nu\partial_\tau L_\lambda + R_\nu\partial_\tau R_\lambda \\ & + \frac{i}{2}L_\nu L_\tau L_\lambda + \frac{i}{2}R_\nu R_\tau R_\lambda\Big)\Big].\end{aligned} \tag{2.11}$$

È possibile ora introdurre un controtermine locale (*controtermine di Bardeen*) che rende nulla la variazione rispetto a trasformazioni vettoriali, garantendo quindi che il sottogruppo $SU(3)_V$ sia libero da anomalie; il controtermine è dato da:

$$\begin{aligned}\mathscr{C}[L_\mu, R_\mu] = \frac{1}{48\pi^2}\int d^4x\, \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}\,\mathrm{Tr}\Big[& (R_\mu L_\nu - L_\mu R_\nu)\partial_\tau(R_\lambda + L_\lambda) \\ & - iL_\mu L_\nu L_\tau R_\lambda + iR_\mu R_\nu R_\tau L_\lambda + \frac{i}{2}R_\mu L_\nu R_\tau L_\lambda\Big].\end{aligned} \tag{2.12}$$

Ridefinendo allora $\Gamma' = \Gamma + \mathscr{C}$ si ottiene $\delta_V\Gamma' = 0$, mentre, sotto trasformazioni assiali,

$$\begin{aligned}\delta_A\Gamma'[A_\mu,V_\mu] = \frac{1}{48\pi^2}\int d^4x\ \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}\ \mathrm{Tr}\,[\beta^a T_a(3G_{\mu\nu}G_{\tau\lambda} + H_{\mu\nu}H_{\tau\lambda}\\ -8iA_\mu A_\nu G_{\tau\lambda} - 8iG_{\mu\nu}A_\tau A_\lambda - 8iA_\mu G_{\nu\tau}A_\lambda - 32A_\mu A_\nu A_\tau A_\lambda)]\,,\end{aligned} \tag{2.13}$$

dove T_a sono i generatori di $SU(N)_V$, abbiamo introdotto i campi vettoriali e assiali, rispettivamente V_μ e A_μ, definiti da

$$V_\mu = \frac{1}{2}(R_\mu + L_\mu) \qquad A_\mu = \frac{1}{2}(R_\mu - L_\mu)$$

e abbiamo posto

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu + i[V_\mu, V_\nu] + i[A_\mu, A_\nu]$$

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, V_\nu] + i[V_\mu, A_\nu].$$

Da ultimo introduciamo la seguente notazione per l'anomalia chirale, che useremo nel resto del lavoro: definiamo

$$\delta_\beta\Gamma'[A_\mu,V_\mu] \equiv \mathscr{A}[A_\mu,V_\mu] \equiv G[\beta,A_\mu,V_\mu] \equiv \int d^4x\ \beta^a(x)G_a(x). \tag{2.14}$$

2.3.2 Modello Standard

In questo paragrafo vogliamo invece mostrare, come anticipato, che il gruppo di gauge del Modello Standard, $G = SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, è libero da anomalie ed è quindi rinormalizzabile. È sufficiente dimostrare la cancellazione delle anomalie per una singola famiglia di quark e leptoni, dato che hanno tutte gli stessi numeri quantici. Consideriamo quindi una famiglia di quark e la relativa famiglia di leptoni (ad esempio i quark u e d e i relativi leptoni, cioè l'elettrone e il neutrino elettronico); Prima di cominciare ricordiamo che si può passare da uno spinore right ad uno spinore left considerando il suo C–coniugato: $\psi_R \to \psi'_L = \psi^c_R = (-i\sigma^2)\psi^*_R$. Quindi possiamo considerare tutti gli spinori come spinori left.

Nei paragrafi precedenti abbiamo mostrato come la dipendenza dell'anomalia chirale dalla dipendenza del gruppo sia descritta completamente dal tensore $d^{abc} = \mathrm{Tr}(R^a\{R^b,R^c\})$ (equazione (2.8)): per verificare la cancellazione delle anomalie dobbiamo quindi calcolare il tensore d^{abc}. Serve prima di tutto conoscere i numeri quantici relativi a G di quark e leptoni: la tabella di seguito riporta gli spinori che stiamo considerando con le relative rappresentazioni di $SU(3)$ e $SU(2)$ rispetto alle quali trasformano; nell'ultima colonna troviamo invece i numeri quantici di ipercarica.

$$\begin{array}{cccc} & SU(3) & SU(2) & Y \\ \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \frac{1}{3} \\ u_R^c & \mathbf{3}^* & \mathbf{1} & -\frac{4}{3} \\ d_R^c & \mathbf{3}^* & \mathbf{1} & \frac{2}{3} \\ \begin{pmatrix} e_L \\ \nu_L \end{pmatrix} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & -1 \\ e_R^c & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 2 \end{array} \tag{2.15}$$

Avremo diversi casi, a seconda di quali siano i sottogruppi a cui si riferiscono gli indici a, b, c. Per cominciare notiamo che se sono tutti relativi al gruppo di colore $SU(3)$ allora $d^{abc} = 0$ perché il contributo degli spinori u_L, d_L cancella quello di u_R^c, d_R^c; inoltre $d^{abc} = 0$ anche quando gli indici si riferiscono tutti a $SU(2)$, dato che tutte le sue rappresentazioni sono reali. Consideriamo ora il caso in cui un solo indice si riferisca a $SU(3)$ o ad $SU(2)$: anche in questo caso $d^{abc} = 0$, dato che tutti i generatori di $SU(3)$ e $SU(2)$ sono traceless. Rimangono allora tre casi da calcolare: due indici relativi ad $SU(2)$ o $SU(3)$ e uno ad $U(1)$ oppure tutti gli indici relativi ad $U(1)$.

Cominciamo dall'ultimo: c'è un solo generatore, quindi abbiamo la traccia del generatore elevato alla terza, che corrisponde a sommare i cubi delle ipercariche delle varie particelle, tenendo conto di un fattore 3 per i quark dovuto alla presenza dei gradi di libertà di colore. Si ottiene:

$$d^{YYY} = 2\left(2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 3 \cdot \frac{2}{3}^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + 2^3\right) = 0$$

Rimangono gli altri due casi. In entrambi dovremo calcolare un termine del tipo $d^{abY} = 2\mathrm{Tr}(R^a R^b Y)$; l'operatore di ipercarica è, in ogni multipletto di $SU(3)$ o $SU(2)$, multiplo dell'identità, e la traccia sugli altri due generatori dà come contributo $\frac{1}{2}\delta^{ab}$ dato che $\mathrm{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ è esattamente la condizione di normalizzazione adottata per i generatori di $SU(N)$. Rimane quindi solamente da sommare sulle ipercariche deboli (dei quark nel caso $SU(3)$ e di quark e leptoni che non sono singoletti di $SU(2)$ nel secondo caso), ottenendo:

$$SU(3) \quad \rightarrow \quad d^{abY} = \delta^{ab}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$SU(2) \quad \rightarrow \quad d^{abY} = \delta^{ab}\left(3\cdot\frac{1}{3}-1\right) = 0$$

Quindi in tutti i casi $d^{abc} = 0$, cioè il gruppo di gauge del Modello Standard è libero da anomalie.

2.4 Equazioni di consistenza di Wess–Zumino

Torniamo alle anomalie chirali: esse godono di alcune importanti proprietà legate alle relazioni di commutazione dell'algebra di Lie del gruppo chirale; tali proprietà furono messe in evidenza per la prima volta da Wess e Zumino nel 1971 [34] e costituirono il punto di partenza per lo sviluppo di metodi algebrici per la costruzione e il calcolo delle anomalie in teorie di gauge generiche (tratteremo successivamente questi aspetti). Riportiamo di seguito le osservazioni di Wess e Zumino.

Prima di tutto scriviamo in maniera comoda le regole di commutazione di $SU(N)_R \otimes SU(N)_L$: presi $\{T^a\}$ famiglia di generatori ortogonali (rispetto al prodotto interno di Cartan [16]) di $\mathfrak{su}(N)$ possiamo definire

$$T^a_V = T^a_R + T^a_L \qquad T^a_A = T^a_R - T^a_L$$

che sono, rispettivamente, i generatori *vettoriali* e i generatori *assiali* dell'algebra di Lie di $SU(N)_R \otimes SU(N)_L$; le loro regole di commutazione sono date da:

$$\begin{aligned} [T^a_V, T^b_V] &= f^{abc}T^c_V \\ [T^a_V, T^b_A] &= f^{abc}T^c_A \\ [T^a_A, T^b_A] &= f^{abc}T^c_V \end{aligned} \tag{2.16}$$

dove le f^{abc} sono le costanti di struttura del gruppo $SU(N)$. Consideriamo ora i generatori delle trasformazioni di gauge: come operatori infinitesimi si possono scrivere nella forma

$$\begin{aligned} X &= -\partial_\mu \frac{\delta}{\delta V_\mu} - V_\mu \times \frac{\delta}{\delta V_\mu} - A_\mu \times \frac{\delta}{\delta A_\mu} + \ldots \\ Y &= -\partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} - A_\mu \times \frac{\delta}{\delta V_\mu} - V_\mu \times \frac{\delta}{\delta A_\mu} + \ldots \equiv \Theta + \ldots \end{aligned} \tag{2.17}$$

dove i puntini si riferiscono all'azione sugli altri campi della teoria e con $\times$ si intende il prodotto dato dal commutatore: $(A \times B)^a = f^{abc}A^bB^c$. Dato che X e Y costituiscono, in ogni punto, una rappresentazione dell'algebra di Lie di G, devono soddisfare relazioni di commutazione indotte dalle (2.18):

$$\begin{aligned}
[X^a(x), X^b(x')] &= f^{abc}\delta(x - x')X^c(x) \\
[X^a(x), Y^b(x')] &= f^{abc}\delta(x - x')Y^c(x) \\
[Y^a(x), Y^b(x')] &= f^{abc}\delta(x - x')X^c(x).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente è possibile rendere libero da anomalie il sottogruppo diagonale $SU(N)_V$ (la cui algebra di Lie è generata dai T^a_V); inoltre l'anomalia chirale dipende solamente dai campi di gauge. Posto allora Γ il funzionale connesso vuoto–vuoto, se scegliamo la forma vettoriale–assiale per l'anomalia chirale, possiamo scrivere le identità di Ward (*anomale*) nella forma

$$\begin{aligned}
X^a\Gamma &= 0 \\
Y^a\Gamma &= G^a[V_\mu, A_\mu].
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Utilizzando ora le (2.18) si ottengono le *equazioni di consistenza di Wess–Zumino*:

$$\begin{aligned}
X^a(x)G^b(x') &= f^{abc}\delta(x - x')G^c(x) \\
Y_a(x)G_b(x') - Y_b(x')G^a(x) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

La prima dice solamente che G^a deve trasformare secondo la rappresentazione coniugata di $SU(3)$, cioè che appartiene ad un ottetto. La seconda invece è più importante: non solo storicamente fu il modo in cui si appurò che il calcolo corretto dell'anomalia chirale era quello di Bardeen [2], ma permette di calcolare il resto dell'anomalia una volta noto (o meglio, fissato) il primo termine; in questo modo non è necessario calcolare la variazione del funzionale a tutti gli ordini, ma si può scegliere di fissare l'anomalia come quella ottenuta, ad esempio, grazie alle equazioni di consistenza dal primo termine del calcolo relativo ai diagrammi ad un loop fermionico triangolare.

2.5 Funzionale di Wess–Zumino

Vogliamo ora cercare una soluzione delle identità di Ward anomale (2.19), che verrà poi utilizzata per tener conto delle anomalie chirali nella teoria effettiva di bassa energia sviluppata nei capitoli successivi. In questo paragrafo ci limiteremo a descrivere la costruzione originaria della soluzione (detta *funzionale di Wess–Zumino*); lo studio della sua struttura e delle sue proprietà è rimandato al capitolo 5.

Dato che, per definizione, l'anomalia non è integrabile non possiamo costruire un funzionale dei soli campi di gauge che sia soluzione delle identità di Ward anomale;

nel caso particolare della simmetria di flavor è però possibile costruire una soluzione utilizzando campi addizionali: la rottura spontanea della simmetria al sottogruppo vettoriale implica l'esistenza di bosoni di Goldstone associati ai generatori rotti, cioè ai generatori assiali. Cerchiamo quindi un funzionale che dipenda dai campi di gauge e da quelli dei bosoni di Goldstone, che indicheremo con $\phi = \phi^a T^a_A$.

Utilizzeremo la notazione introdotta nelle (2.17). Con questa convenzione le identità di Ward si possono riscrivere come:

$$X_i \Gamma = 0 \qquad Y_i \Gamma \equiv (Z_i + \Theta_i)\Gamma = G_i$$

(Z_i agisce sui campi di materia e Θ_i sui campi di gauge), dove G_i è l'anomalia chirale come calcolata nella (2.13). Introduciamo ora la seguente notazione:

$$\alpha \cdot \Theta \equiv \int d^4x\ \alpha_i(x)\Theta_i(x).$$

Allora le identità di Ward implicano che, dato che l'anomalia dipende solo da A_μ, V_μ, si ha:

$$(\alpha \cdot (Z + \Theta))^n\, \Gamma = (\alpha \cdot \Theta)^{n-1} \alpha \cdot G,$$

da cui, sommando su n e moltiplicando ogni termine per $1/n!$, si ottiene

$$e^{\alpha\cdot(Z+\Theta)}\Gamma = \Gamma + \frac{e^{\alpha\cdot\Theta} - 1}{\alpha \cdot \Theta} \alpha \cdot G.$$

Ora, $e^{\alpha\cdot(Z+\Theta)}\Gamma[\phi, A_\mu, V_\mu] = \Gamma[\phi', A'_\mu, V'_\mu]$ (dove i campi primati sono i trasformati di gauge); inoltre possiamo scegliere $\alpha(x)$ in modo che $\phi(x) = 0$: basta scegliere $\alpha(x) = -\phi(x)$, e questo è possibile perché ϕ descrive il campo dei bosoni di Goldstone, associati ai generatori assiali. Senza perdita di generalità possiamo poi porre $\Gamma[0, A_\mu, V_\mu] = 0$. Troviamo allora:

$$\Gamma_{WZ}[\phi, A_\mu, V_\mu] = \frac{1 - e^{\phi\cdot\Theta}}{\phi \cdot \Theta} \phi \cdot G[A_\mu, V_\mu] = \int_0^1 dt\ e^{-t\phi\cdot\Theta} \phi \cdot G. \tag{2.21}$$

che è il *funzionale di Wess–Zumino* così come calcolato in [34].

CAPITOLO 3

Struttura geometrica delle anomalie chirali

Lo studio delle anomalie chirali, e delle loro conseguenze a bassa energia, iniziato negli anni '70 dopo i lavori di Bardeen e Wess e Zumino [2, 34] ha avuto nuovo impulso negli anni '80, quando, a cominciare dall'articolo di Witten [33], sono state utilizzate tecniche di geometria differenziale [24, 25, 36, 38]. Riportiamo in questo una breve discussione degli strumenti sviluppati: torneranno utili in seguito, in quanto saranno utilizzati per la costruzione di funzionali analoghi al funzionale di Wess–Zumino (introdotto nel capitolo 2). Il risultato principale che otterremo in questo capitolo è la possibilità di costruire una torre di equazioni, dette *descent equations*, fra le cui soluzioni troviamo l'anomalia chirale: questo permette di ricondurre il problema del calcolo delle anomalie ad un problema coomologico (legato alla coomologia BRS [3, 6]) ottenendo un metodo generale per trovare soluzioni delle equazioni di consistenza di Wess–Zumino. Mostreremo inoltre una generalizzazione di tali metodi, proposta da Mañes, Stora e Zumino [25] per poter estendere le descent equations a teorie di gauge definite su fibrati principali non banali, nelle quali la definizione globale di una 1–forma associata alla connessione di gauge richieda l'introduzione di una "connessione di background".

3.1 Anomalia abeliana

Prima di affrontare il caso non abeliano citiamo brevemente quello abeliano, nel quale si cominciano a vedere alcune proprietà delle anomalie legate alla possibilità di esprimere queste ultime in termini di forme differenziali. Consideriamo allora la teoria di campo associata alla densità lagrangiana

$$\mathscr{L} = \overline{\psi}(\partial\!\!\!/ - iA\!\!\!/)\psi,$$

dove A indica i campi di gauge e i campi ψ sono fermioni di Dirac. Una tale lagrangiana, oltre ad essere invariante sotto il gruppo di gauge, è invariante sotto il gruppo chirale $U(1)_R \otimes U(1)_L$. Il fatto che la teoria sia anomala si ricava direttamente dal caso non abeliano. Infatti la derivazione del capitolo 2 rimane valida anche per trasformazioni $U(1)$; inoltre, dalla forma esplicita (2.7) dell'anomalia, si vede che è la simmetria $U(1)$ assiale ad essere anomala e si ricava:

$$\partial^\mu J^5_\mu = -\frac{1}{16\pi^2}\mathrm{Tr}\,(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma})\,.$$

dove J^5_μ è la corrente assiale $J^5_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi$.

Il risultato si può generalizzare [36] a $2n$ dimensioni: l'anomalia chirale abeliana è data, a meno di una costante moltiplicativa, dall' n–esimo carattere di Chern[1] [20]

$$c_n = \mathrm{Tr}(F^n)$$

dove F è la forma di curvatura associata alle connessioni di gauge.

Proposizione 3.1. *L'n–esimo carattere di Chern c_n è una $2n$–forma differenziale chiusa e gauge invariante.*

Dimostrazione. Il fatto che sia gauge invariante segue immediatamente dal fatto che F trasforma in modo covariante e la traccia è Ad–invariante. Per vedere che è chiusa basta poi applicare l'equazione di struttura (1.1). □

Ora, se i gruppi di coomologia di de Rham della base del fibrato sono banali, il carattere di Chern (e quindi l'anomalia) sarà una forma esatta, oltre che chiusa, e quindi si potrà scrivere come differenziale di una $(2n-1)$–forma. In particolare[2] si può dimostrare che è il differenziale della forma di Chern–Simons; per $n = 2$:

$$\mathrm{Tr}(F^2) = \mathrm{Tr}\left(d\left(A \wedge dA + \frac{2}{3}A \wedge A \wedge A\right)\right).$$

[1] Per non appesantire l'esposizione rimandiamo all'Appendice A per le definizioni e le proprietà principali degli oggetti matematici utilizzati di seguito.

[2] La dimostrazione si può trovare nell'Appendice A.

Nel caso abeliano il ricorso alla geometria differenziale è piuttosto superfluo, e può servire al più per scrivere in maniera compatta i risultati. L'unica cosa che vogliamo rilevare è che appare abbastanza naturale la descrizione in termini di forme differenziali; anzi, più in particolare, in termini di polinomi invarianti di forme differenziali.

Nel seguito di questo capitolo vogliamo affrontare in modo simile il problema della costruzione e dello studio delle anomalie non abeliane (cioè di soluzioni delle equazioni di consistenza di Wess–Zumino). Come vedremo il problema ha un forte legame con una costruzione coomologica legata alla simmetria BRS.

3.2 Anomalie non abeliane e “descent equations”

Come le anomalie abeliane, anche quelle non abeliane ammettono una descrizione in termini di forme differenziali; la struttura che se ne ricava risulta interessante ed è stata oggetto di studio di numerosi lavori [17, 24, 25, 33, 36, 37, 38]. Dedichiamo questa sezione alla descrizione dei metodi sviluppati da Zumino et al. [36, 38], Mañes e Stora [24, 25] per dare un'interpretazione geometrica delle anomalie chirali. Tali metodi costituiranno uno degli strumenti principali utilizzati nelle considerazioni dei capitoli successivi, per ora però ci limiteremo a darne un'analisi formale.

3.2.1 Trasformazioni BRS

Uno dei risultati più importanti per lo studio delle teorie di gauge non abeliane fu la “scoperta” che il funzionale di azione effettiva di una teoria di gauge non abeliana si può rendere invariante, con un metodo di gauge fixing che prevede l'introduzione dei campi di ghost, sotto una particolare classe di trasformazioni, le *trasformazioni BRS*. Consideriamo quindi una teoria di gauge con gruppo G non abeliano; indichiamo con $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. Introduciamo inoltre generatori T^a di $\mathfrak{g}$ ortonormali rispetto al prodotto interno di Cartan [16]; in coordinate i campi di gauge si scriveranno allora come: $A_\mu = A_\mu^a T^a$. Consideriamo inoltre anche i campi di ghost (e di anti–ghost) $c = c^a T^a$ (rispettivamente $\overline{c} = \overline{c}^a T^a$).

Le trasformazioni BRS infinitesime si scrivono nella forma[3]:

$$\begin{aligned} A_\mu^a(x) &\mapsto A_\mu^a(x) + \theta D_\mu c^a(x) \\ c^a(x) &\mapsto c^a(x) - \tfrac{1}{2}\theta f^{abc} c^b(x) c^c(x) \\ \overline{c}^a(x) &\mapsto \overline{c}^a(x) + \theta B^a(x) \end{aligned}$$

[3]Diamo solo l'azione sui campi di gauge e sui ghost.

con B^a campo ausiliario e θ parametro (anticommutante) della trasformazione. Possiamo allora definire un operatore s, detto *operatore BRS*, la cui azione sarà:

$$\begin{aligned} sA^a_\mu(x) &= D_\mu c^a(x) \\ sc^a(x) &= -\tfrac{1}{2} f^{abc} c^b(x) c^c(x) \\ s\overline{c}^a(x) &= B^a(x) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Come ben noto, la proprietà principale dell'operatore BRS è la sua nilpotenza: $s^2 = 0$, che si può ricavare direttamente dalle (3.1).

In questo paragrafo vogliamo riassumere brevemente la struttura e l'interpretazione geometrica delle trasformazioni BRS [3, 25], in modo da introdurre gli strumenti che utilizzeremo in seguito per discutere la struttura geometrica delle anomalie chirali. Infatti, come vedremo, è possibile studiare le anomalie chirali attraverso una costruzione coomologica nella quale l'operatore BRS rappresenta l'operatore di bordo.

Descrizione algebrica e coomologia BRS

Prima di discutere la struttura algebrica delle trasformazioni BRS è opportuno introdurre alcuni risultati preliminari. Cominciamo con il ricordare la definizione della coomologia associata ad un algebra graduata:

Definizione 3.1. *Un'*algebra graduata *su* $\mathbb{C}$ *è un'algebra complessa* $\mathcal{A} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}^k$ *tale che il prodotto interno soddisfi: dati* $a \in \mathcal{A}^k$ *e* $b \in \mathcal{A}^h$*,* $ab \in \mathcal{A}^{h+k}$*.*

Sia ora $d : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ un operatore tale che $d(ab) = d(a)b - ad(b)$, definito da una famiglia $\{d_k : \mathcal{A}_k \to \mathcal{A}^{k+1}\}$ e che soddisfa $d^2 = 0$. Un tale operatore si dice *operatore di bordo* e definisce una coomologia su $\mathcal{A}$:

Definizione 3.2. *Definiamo k–esimo gruppo di coomologia di $\mathcal{A}$ rispetto a d il gruppo additivo* $H^k(\mathcal{A}, d) \equiv \mathrm{Ker}\ d_k/\mathrm{Im}\ d_{k-1}$*. Definiamo inoltre* $H^*(\mathcal{A}, d) \equiv \bigoplus_k H^k(\mathcal{A}, d)$*.*

Possiamo ora introdurre una piccola generalizzazione di queste definizioni: un'*algebra bi–graduata* è un'algebra $\mathcal{A}$ che si scrive come somma diretta di $\mathcal{A}^{h,k}$ su $h, k \in \mathbb{N}$. Se abbiamo due operatori d e δ con le proprietà di cui sopra, relative però ai due diversi gradi di $\mathcal{A}$, possiamo definire due coomologie: $H^{h,*}(\mathcal{A}, d)$ e $H^{*,k}(\mathcal{A}, \delta)$. Supponiamo ora che d e δ anticommutino: $d\delta + \delta d = 0$. Allora possiamo definire la coomologia di δ modulo d: grazie alla proprietà di anticommutazione gli operatori δ_k, che definiscono δ, si possono proiettare ad operatori $\overline{\delta}_k : \mathcal{A}^{h,k}/d(\mathcal{A}^{h-1,k}) \to \mathcal{A}^{h,k+1}/d(\mathcal{A}^{h-1,k+1})$.

Definizione 3.3. *Data un'algebra bi–graduata $\mathcal{A}$, due operatori di bordo anticommutanti d e δ relativi ai due diversi gradi dell'algebra e proiettato δ come sopra, definiamo la coomologia di $\mathcal{A}$ rispetto a δ* modulo *d come:* $H^{k,l}(\mathcal{A}, \delta|d) = \mathrm{Ker}\ \overline{\delta}_k / \mathrm{Im}\ \overline{\delta}_{k-1}$.

Torniamo ora alle trasformazioni BRS: vogliamo mostrare come l'usuale differenziale esterno di forme differenziali e l'operatore BRS possono essere identificati con gli operatori di bordo di un'algebra bi–graduata; successivamente mostreremo come la coomologia (BRS) modulo d sia rilevante ai fini del calcolo e dello studio delle anomalie.

Consideriamo in seguito solamente i campi di gauge e i campi di ghost; la costruzione si può estendere includendo anche gli anti–ghost e il campo ausiliario B [3], ma tale estensione non è rilevante ai fini dello studio delle anomalie, e non verrà quindi discussa in questo lavoro. Per quello che segue non è inoltre rilevante l'interpretazione geometrica dei campi di gauge e dei campi di ghost, ma solo le relazioni algebriche indotte dalle trasformazioni BRS; il collegamento con la geometria differenziale sarà discusso successivamente, per rendere più esplicite le costruzioni presentate in questo paragrafo e per il calcolo delle anomalie.

Partiamo quindi dalle trasformazioni BRS. Gli oggetti con cui si lavora in fisica sono generalmente polinomi locali dei campi: vorremo allora lavorare con un'algebra, in modo da includere da subito tale struttura. Sia quindi $\mathcal{A}$ l'algebra libera generata dai campi A^a, F^a, c^a e φ^a (dove F^a sono le coordinate della field strenght rispetto ai generatori dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$); l'ultimo campo, cioè φ^a, rappresenta il differenziale dei campi dei ghost, ma per coerenza col fatto che vogliamo lavorare con un'algebra libera è più corretto tenerlo distinto, per ora, dal campo dei ghost. Definiamo ora due operatori, d e s, in accordo con le trasformazioni BRS (3.1) e l'equazione di struttura (1.1):

$$\begin{aligned} &dA = F - \tfrac{1}{2}[A, A], && dF = [A, F], \\ &dc = \varphi, && d\varphi = 0, \\ &sA = -dc - [A, c], && sc = -\tfrac{1}{2}[c, c]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

In questo modo otteniamo un'algebra bi–graduata $\mathcal{A}$, dove i gradi dei generatori sono: $(1, 0)$ per A^a, $(0, 1)$ per c^a, $(2, 0)$ per F^a, $(0, 2)$ per φ^a. d aumenta di 1 il primo grado, s il secondo. Successivamente identificheremo d con il differenziale esterno sullo spazio–tempo, e s con l'operatore BRS: i due gradi rappresenteranno il grado della forma differenziale e il numero di ghost. I due operatori sono operatori di bordo dato che soddisfano $d^2 = s^2 = 0$; e inoltre anticommutano, come segue immediatamente dalle (3.2). Dall'algebra $\mathcal{A}$ possiamo allora costruire la coomologia rispetto ad s modulo

d , come nella definizione 3.3, ottenendo la *coomologia BRS locale* [3] $H^{h,k}(s|d)$; un rappresentante ω di una classe in $H^{h,k}(s|d)$ soddisferà allora:

$$s\omega + d\eta = 0 \tag{3.3}$$

con $\eta \in \mathcal{A}$ di grado $(h-1, k+1)$. Vedremo nei paragrafi successivi che l'anomalia in n dimensioni corrisponde ad una classe non banale in $H^{n,1}$: in questo modo il problema del calcolo delle anomalie diventa un problema coomologico; il vantaggio è di avere a disposizione tutti gli strumenti dell'algebra omologica, e di poter quindi affrontare il problema in maniera più efficiente.

Interpretazione geometrica e "descent equations"

Nel paragrafo precedente abbiamo discusso la struttura algebrica delle trasformazioni BRS. Ora vogliamo costruire un modello geometrico la cui struttura algebrica sia la stessa di quella delle trasformazioni BRS in modo da poter associare oggetti differenziali a quelli algebrici utilizzati in precedenza. Dato che stiamo lavorando con teorie di gauge, partiamo da un fibrato G–principale banale[4] $P(M,G)$ e consideriamo una famiglia di forme di connessione A_λ, a cui è associata una famiglia di forme di curvatura $F_\lambda = dA_\lambda + [A_\lambda, A_\lambda]$, dove λ è un parametro continuo "verticale", relativo cioè alla fibra (e quindi al gruppo G). Introduciamo un differenziale esterno d_λ, relativo al parametro λ (che in ogni punto $x \in M$ possiamo interpretare come differenziale rispetto alle coordinate relative alla fibra, cioè al gruppo G) e una derivazione omotopica[5] l_λ in modo che soddisfino le relazioni

$$\begin{gathered} d^2 = d_\lambda^2 = dd_\lambda + d_\lambda d = 0 \\ l_\lambda d - dl_\lambda = d_\lambda \\ d_\lambda l_\lambda - l_\lambda d_\lambda = 0 \end{gathered} \tag{3.4}$$

Introduciamo inoltre una forma v_λ di grado 0 in x e di grado 1 in λ (che vogliamo far corrispondere al campo dei ghost di Faddeev–Popov). Come in precedenza siamo ora interessati a polinomi locali in A e v (e nelle loro derivate): il modo in cui sono definiti è quello più intuitivo, ma per completezza riportiamo in questo lavoro le definizioni e i risultati principali; dato però che la discussione con tutti i dettagli può risultare un po' tediosa e distoglierci dall'argomento che stiamo trattando,

[4]In questo modo non abbiamo problemi a definire globalmente le connessioni di gauge come 1–forme sulla base M. Come vedremo successivamente è possibile generalizzare la costruzione con l'introduzione di una "connessione di background" A_0 [25].

[5]Si veda l'Appendice B per i dettagli.

rimandiamo all'Appendice A. Esplicitiamo ora l'azione di d_λ e l_λ sui polinomi di A, F, v, dv. Per fare questo è sufficiente definire l'azione sui generatori; imponiamo quindi le relazioni:

$$\begin{aligned} l_\lambda A_\lambda &= v_\lambda \\ l_\lambda F_\lambda &= l_\lambda v_\lambda = 0 \\ l_\lambda^2 F_\lambda &= 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ora, da $l_\lambda F_\lambda = 0$ ricaviamo facilmente, usando le (3.4), che

$$d_\lambda A_\lambda = -dv_\lambda - [v_\lambda, A_\lambda] \tag{3.6}$$

e analogamente da $l_\lambda^2 F_\lambda = 0$ otteniamo

$$d_\lambda v_\lambda = -\frac{1}{2}[v_\lambda, v_\lambda]. \tag{3.7}$$

L'azione degli altri operatori si ricava usando le relazioni (3.4); riassumendo abbiamo:

$$\begin{array}{ll} dA_\lambda = F_\lambda - \frac{1}{2}[A_\lambda, A_\lambda], & dF_\lambda = [A_\lambda, F_\lambda], \\ d_\lambda v_\lambda = -d_\lambda v_\lambda - [A_\lambda, v_\lambda], & d_\lambda v_\lambda = -\frac{1}{2}[v_\lambda, v_\lambda] \\ d_\lambda F_\lambda = -[v_\lambda, F_\lambda] & \end{array} \tag{3.8}$$

Le (3.8) sono equivalenti alle (3.2), cioè alle relazioni che soddisfano i due operatori di bordo con cui abbiamo costruito la coomologia BRS. Notiamo inoltre che se parametrizziamo A_λ come:

$$A_\lambda(x) = g^{-1}(x,\lambda)A(x)g(x,\lambda) + g^{-1}(x,\lambda)dg(x,\lambda) \tag{3.9}$$

con $g(x,\lambda)$ mappa a valori in G, le (3.8) corrispondono alle trasformazioni BRS (in assenza di anti–ghost), dove l'operatore s coincide con il differenziale esterno d_λ e il campo v è identificato con il campo di ghost; in particolare:

$$v_\lambda = g^{-1}(x,\lambda)sg(x,\lambda). \tag{3.10}$$

Consideriamo ora un polinomio ad–invariante P su $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Assumiamo che $H^k_{\mathrm{dR}}(M) = 0$ per $1 \le k \le 2n$. Grazie alla identità di Bianchi e alle (3.5) $P(F^n)$ è chiusa e gauge invariante. Allora $sP(F^n) = 0$ e $P(F^n) = d\omega^0_{2n-1}(A)$ dove ω^0_{2n-1} è una $(2n-1)$–forma differenziale.

Utilizzando la (B.3) e notando che $l_\lambda d\omega^0_{2n-1} = l_\lambda P(F^n) = 0$ otteniamo:

$$s\frac{l^p_\lambda}{p!}\omega^0_{2n-1} = -d\left(\frac{l^{p+1}_\lambda}{(p+1)!}\omega^0_{2n-1}\right)$$

Definendo ora $\omega^p_{2n-1-p} \equiv \frac{l^p_\lambda}{p!}\omega^0_{2n-1}$ otteniamo una torre di *descent equations* [25, 36, 37, 38]:

$$\begin{aligned} s\omega^0_{2n-1} &= -d\omega^1_{2n-2} \\ s\omega^1_{2n-2} &= -d\omega^2_{2n-3} \\ &\vdots \\ s\omega^{2n-1}_0 &= 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

dove, in generale, $\omega^p_{2n-1-p} = \omega^p_{2n-1-p}(v, A)$ e p indica la potenza di v che compare nella forma. Vedremo nel paragrafo successivo che le soluzioni delle descent equations soddisfano automaticamente le equazioni di consistenza di Wess–Zumino: con le (3.11) abbiamo quindi trovato una buona caratterizzazione delle anomalie. In particolare notiamo che il contenuto delle descent equations è lo stesso dell'equazione (3.3): le soluzioni sono quindi cocicli e definiscono classi di coomologia BRS.

3.2.2 Descent equations e equazioni di consistenza

Conclusa la breve descrizione degli strumenti necessari per proseguire, veniamo alla discussione della struttura delle anomalie chirali. Riprendiamo quanto fatto nel capitolo precedente e consideriamo un teoria in $2n-2$ dimensioni con gruppo di gauge G non abeliano, semisemplice connesso e compatto. Se la teoria è anomala, le anomalie devono soddisfare le equazioni di consistenza di Wess–Zumino, quindi:

$$\delta_\alpha G(\beta, A) - \delta_\beta G(\alpha, A) = G([\alpha,\beta], A)$$

dove $G(\alpha, A) \equiv \int d^{(2n-2)}x\ \alpha^a G_a(A)$ è la variazione anomala del funzionale di azione effettiva sotto una trasformazione di parametro α.

Osserviamo che possiamo riscrivere le identità di Ward anomale utilizzando le trasformazioni BRS, ottenendo

$$s\Gamma[A] = \int_M G(v, A)$$

da cui ricaviamo una riformulazione delle equazioni di consistenza:

$$\int sG(v,A) = 0$$

Quest'equazione ci dice immediatamente che un'anomalia, in quanto soluzione delle equazioni di consistenza, è un cociclo rispetto ad s, e quindi individua una classe in coomologia BRS. Più precisamente l'anomalia determina una classe in $H^{2n-2,1}(s|d)$.

Vogliamo ora mostrare il legame fra le descent equations e le anomalie: come vedremo poco più avanti le soluzioni delle descent equations soddisfano automaticamente le equazioni di consistenza di Wess–Zumino e avremo quindi un nuovo metodo per calcolare le anomalie (a meno di un fattore di normalizzazione[6]).

Il punto di partenza è ancora la forma ω^0_{2n-1}: dato che si tratta di una $(2n-1)$–forma è identicamente nulla sullo spazio $(2n-2)$–dimensionale M e quindi dobbiamo estendere la teoria ad una dimensione in più. La necessità di ricorrere ad uno spazio con una dimensione in più è strettamente legata al problema coomologico: infatti per calcolare $H^{2n-2,1}(s|d)$ si ricorre ad $H^{2n-1,0}(s|d)$, ma tale procedimento ha senso solo se $H^{2n-1,0}$ può non essere banale, il che è impossibile in una varietà di dimensione $2n-2$.

Consideriamo quindi $D \equiv M \times [0,1]$ (il cui bordo, se M è chiusa, è $\partial D = M \times \{0,1\}$) ed estendiamo a D i vari campi; in particolare, posta τ la coordinata relativa al fattore $[0,1]$, estendiamo A ad una famiglia di connessioni A_τ tale che $A_{\tau=0} = 0$, $A_1 = A$ (una parametrizzazione semplice è ad esempio $A_\tau = \tau A$); consideriamo inoltre una famiglia di trasformazioni di gauge $g_\tau \in \mathcal{G}$ tali che[7] $g_0 = \mathrm{Id}$ e $g(1) = g \equiv e^\xi$. Estendiamo anche l'operatore BRS e i campi di gauge a D, ottenendo $\underline{s}$ e $\underline{v}$ che soddisfano ancora le relazioni (3.5) e successive, dove il differenziale spaziale è ora $\mathbf{d} \equiv d + d_\tau$.

Si vede ora immediatamente che, grazie alle (3.11), $G(v,A) \equiv k_n \omega^1_{2n-2}(v,A)$ (con k_n costante numerica normalizzazione) soddisfa le equazioni di consistenza. Infatti:

$$s\int_M \omega^1_{2n-2} = s\int_{\partial D} \omega^1_{2n-2} = -\underline{s}\int_D \mathbf{d}\omega^1_{2n-2} = \underline{s}\int_D \underline{s}\omega^0_{2n-1} = 0$$

dove la prima uguaglianza segue dal fatto che A_τ è nullo su $M \times \{0\}$, le altre da

[6] Discuteremo più avanti di questo. In ogni caso possiamo fissarlo calcolando con una procedura di regolarizzazione del funzionale di azione effettiva il "primo termine" dell'anomalia e ricavare la forma completa utilizzando le descent equations.

[7] È sufficiente [25] considerare le trasformazioni di gauge in $\mathcal{G}_0$, la componente semplicemente connessa di $\mathcal{G}$, e quindi possiamo definire g come esponenziale di un campo ξ a valori in $\mathfrak{g}$.

Stokes e dalla nilpotenza delle trasformazioni BRS.

Si può dimostrare [36, 38] che la costante k_n è individuata univocamente dal calcolo dell'anomalia chirale abeliana; risulta

$$k_n = \frac{1}{n!}\frac{i^n}{(2\pi)^{n-1}}$$

Osservazione 3.4. Come già osservato nel capitolo precedente non esiste un'unica forma valida per l'anomalia non abeliana, infatti possiamo sommare all'azione effettiva un qualunque controtermine locale e sfruttare questa libertà per modificarne l'espressione. Utilizzando gli strumenti introdotti in questo capitolo possiamo precisare quali sono le ambiguità sulla forma dell'anomalia: G è definita a meno della variazione BRS di un funzionale locale e di un differenziale totale; cioè

$$\omega' \equiv \omega + s\Gamma_{\text{loc}} + df$$

è una forma ammissibile per l'anomalia se lo è ω. Cioè, come anticipato, quello che conta è solamente la classe di coomologia della soluzione in $H(s|d)$. Una teoria di gauge è quindi anomala se (e solo se) la variazione del funzionale di azione effettiva individua una classe non banale nella coomologia BRS locale.

3.2.3 Calcolo di soluzioni delle descent equations

Come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, il calcolo dell'anomalia chirale si può ricondurre alla soluzione del problema coomologico individuato dalle descent equations (3.11). Lavoriamo come in precedenza su una varietà di dimensione $2n-1$, il cui bordo è lo spazio–tempo. Per iniziare vogliamo quindi determinare la coomologia $H^{2n-1,0}(s|d)$; questo si può fare osservando che considerando l'immersione naturale $\iota : d(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{A}$ si ottiene una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow (d\mathcal{A})^{h,*} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A}^{h,*} \xrightarrow{p} C^{h,*}(s|d) \longrightarrow 0 \tag{3.12}$$

dove $C(s|d)$ sono le s–cocatene modulo d e p è la proiezione al quoziente. Inoltre, se la d–coomologia di $\mathcal{A}$ è banale (questo è vero se lo spazio tempo ha tutti i gruppi di coomologia di de Rham banali; e $\mathbb{R}^{2n-2}$ soddisfa questa condizione), allora $H^{h,k}(\mathcal{A}, s|d) = H^{h+1,k}(d\mathcal{A}, s)$. Utilizzando l'omomorfismo di bordo[8] ∂ indotto in

[8]Si tratta di un risultato standard delle teorie coomologiche; dato che non ci interessa l'azione esplicita di ∂, ma solo la sua esistenza, rimandiamo ad un testo di topologia algebrica per i dettagli, ad esempio [14].

coomologia dalla (3.12) abbiamo quindi una successione esatta lunga in coomologia:

$$\ldots \xrightarrow{\iota^*} H^{h,k}(s) \xrightarrow{p^*} H^{h,k}(s|d) \xrightarrow{\partial} H^{h-1,k+1}(s|d) \xrightarrow{\iota^*} H^{h,k+1}(s) \xrightarrow{p^*} \ldots \quad (3.13)$$

Possiamo utilizzare la successione (3.13) per risolvere la torre di descent equations. In particolare noi saremo interessati a ω^1_{2n-2}, quindi all'equazione

$$s\omega^1_{2n-2} + d\omega^2_{2n-3} = 0.$$

Allora la parte che rilevante della (3.13) sarà:

$$\cdots \longrightarrow H^{2n-1,0}(s|d) \xrightarrow{\partial} H^{2n-2,1}(s|d) \longrightarrow H^{2n-1,1}(s) \longrightarrow \cdots$$

A noi interessa calcolare $\omega^1_{2n-2} \in H^{2n-2,1}(s|d)$: se $H^{2n-1,1}(s)$ fosse uguale a zero, ∂ sarebbe un'isomorfismo grazie all'esattezza della successione, e quindi ω^1_{2n-2} proverrebbe da $\omega^0_{2n-1} \in H^{2n-1,0}(s|d)$. Ora, si può dimostrare [6, 15] che la s–coomologia, se G è semisemplice, è isomorfa all'algebra generata da $P(F,\ldots,F)$ e $Q(c,[c,c],\ldots,[c,c])$ al variare di P e Q nei polinomi invarianti su $\mathfrak{g}$; dal fatto che F è una 2–forma otteniamo allora che $H^{2n-1,k}(s) = 0$ per ogni k. Quindi ∂ è un isomorfismo, e la caratterizzazione della s–coomologia appena citata, insieme al fatto che $H^{2n-1}(\mathcal{A},s|d) = H^{2n}(d\mathcal{A},s)$ ci dice che ogni soluzione delle descent equations proviene da $P(F,\ldots,F)$ dove P è un polinomio invariante su $\mathfrak{g}$ di grado n ($P \in I^n(G)$ con le notazioni dell'Appendice A).

Possiamo ora trovare una forma esplicita per la soluzione in $2n-2$ dimensioni, e verificare che effettivamente nel caso $n=3$ si ritrovano i risultati del capitolo 2. Come visto in precedenza possiamo partire da un polinomio invariante di grado n; nel caso $SU(N)$, ad esempio, come polinomio ad–invariante P consideriamo la traccia del prodotto di n elementi di $\mathfrak{g}$: $\mathrm{Tr}(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)$. Cerchiamo quindi una soluzione di

$$P(F^n(A)) = d\omega^0_{2n-1}.$$

Definiamo una famiglia ad un parametro di potenziali di gauge: $A_t = tA$ per $t \in [0,1]$; sia F_t la relativa famiglia di forme di curvatura. Allora avremo che:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(F^n_t) = n\mathrm{Tr}(D_tA, F^{n-1}_t) = nd\mathrm{Tr}(A, F^{n-1}_t)$$

dove $D_t = d + [A_t,\cdot]$ è la derivata covariante relativa ad A_t e l'ultima uguaglianza segue dall'identità di Bianchi. Integrando in dt possiamo allora ottenere la forma esplicita per ω^0_{2n-1} (che, notiamo, corrisponde all'invariante topologico secondario di Chern–Simons):

$$\omega^0_{2n-1} = \int_0^1 dt\ \mathrm{Tr}(A, F_t^{n-1}).$$

Se ora facciamo una trasformazione di gauge g, calcoliamo ω^0_{2n-1} in $A+v$ e isoliamo il termine al primo ordine[9] in v si ottiene [36]:

$$\omega^1_{2n-2}(v, A) = n(n-1) \int_0^1 dt\ (1-t)\mathrm{Tr}(v\ d(AF^{n-2})). \tag{3.14}$$

Possiamo ora verificare che la (3.14) restituisce, a meno della costante moltiplicativa k_n, l'anomalia chirale calcolata nel capitolo 2; infatti, per $n = 3$ (cioè in 4 dimensioni), si ricava facilmente

$$k_3\omega^1_4(v, A) = \frac{-i}{24\pi^2}\mathrm{Tr}\left(v\ d\left(AdA + \frac{1}{2}A^3\right)\right) \tag{3.15}$$

che coincide esattamente con la (2.7).

3.3 Anomalie in presenza di connessioni di background

Nelle sezioni precedenti abbiamo supposto che il fibrato $P(M, G)$ fosse banale, e che quindi non ci fossero ostruzioni a definire globalmente le 1–forme di connessione associate a connessioni di gauge sul fibrato. La costruzione si può estendere [25] al caso in cui per definire globalmente A sia necessario introdurre una connessione di background (più precisamente una 1–forma su M a valori nell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$) A_0. Come nel resto di questo capitolo per ora siamo interessati solo a descrivere l'aspetto formale di queste costruzioni; l'applicazione e le relative considerazioni sono rimandate ai capitoli successivi.

Supponiamo allora di avere una teoria di gauge anomala, con anomalia che si può scrivere nella forma generica $\mathscr{A} = \int G(v, A, A_0)$. Supponiamo inoltre che A_0 sia BRS invariante, $sA_0 = 0$ (e, coerentemente con questo, $l_\lambda A_0 = 0$, $l_\lambda F(A_0) = 0$). Come

[9] Il che corrisponde [25] a calcolare ω^1_{2n-2}. Infatti facendo una trasformazione BRS su $\omega^0_{2n-1}(A)$ si ottiene $\omega^0_{2n-1}(A+v)$, che ora è una $(2n-1)$–forma non più sulla base del fibrato principale ma su tutto il fibrato, cioè è una $(2n-1)$–forma rispetto al differenziale $d + d_\lambda = d + s$; è una forma chiusa rispetto a d (grazie all'algebra BRS) e quindi si ottiene come differenziale di una $(2n-2)$–forma ω^1_{2n-1}. E ω^1_{2n-1} corrisponde alla parte lineare in v di ω^0_{2n-1} in quanto $\omega^1_{2n-1}(A, v) \equiv l_\lambda\omega^0_{2n-1}(A)$ e $l_\lambda A = v$, quindi applicare l_λ corrisponde a sostituire A con $A+v$ e prendere la parte lineare in v. Analogamente si ottiene che ω^p_{2n-1-p} corrisponde alla parte in v^p nello sviluppo di $\omega^0_{2n-1}(A+v)$.

per il caso precedente partiamo da un polinomio ad–invariante P, con la differenza che cerchiamo una forma ω^0_{2n-1} che, anziché soddisfare $d\omega^0_{2n-1} = P(F^n)$, soddisfi

$$P(F^n(A)) - P(F^n(A_0)) = d\omega^0_{2n-1}$$

Anche in questo caso, usando la formula di omotopia estesa di Cartan (B.3), si ricavano le descent equations (3.11) (dove ora però le forme sono espresse anche in termini di A_0). Allora l'anomalia sarà data, a meno della costante moltiplicativa k_n, da $G(v, A, A_0) = \omega^1_{2n-1}$, che soddisfa automaticamente le equazioni di consistenza di Wess–Zumino.

Osservazione 3.1. D'ora in poi utilizzeremo $\omega^0_{2n-1}(A, A_0)$ per indicare la dipendenza dalle due 1–forme; di seguito ne daremo anche un'espressione esplicita. Sottolineiamo che questa notazione sarà utilizzata solo ed esclusivamente quando si considera anche il background A_0.

Dato che sarà utile nelle applicazioni successive vogliamo ora trovare una forma esplicita per ω^0_{2n-1}, e ricavare alcune relazioni importanti. Consideriamo allora due 1–forme A_1 e A_2 a valori in $\mathfrak{g}$; allora, posto $A_t = tA_2 + (1-t)A_1$ si ricava [25] che

$$P(F_2^n) - P(F_1^n) = nd\int_0^1 P(A_2 - A_1, F_t^{n-1}) \equiv d\omega^0_{2n-1}(A_2, A_1) \tag{3.16}$$

che definisce quindi ω^0_{2n-1} a meno di una forma chiusa (che non sarà rilevante ai fini delle considerazioni successive).

Consideriamo ora tre 1–forme A_1, A_2, A_3; sia T_2 il 2–simplesso standard (cioè il triangolo in $\mathbb{R}^2$, su cui mettiamo coordinate t_1 e t_2, con i vertici in $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$) e $A_t = t_1A_1 + t_2A_2 + (1 - t_1 - t_2)A_3$; applicando la formula di omotopia estesa di Cartan (B.4) per $p = 1$ si ottiene allora la *triangle formula*:

$$\begin{aligned}
-\int_{\partial T_2} l_t P(F_t^n) &= \omega^0_{2n-1}(A_1, A_2) + \omega^0_{2n-1}(A_2, A_3) + \omega^0_{2n-1}(A_3, A_1) \\
&= \frac{n(n-1)}{2} d\int_{T_2} SP(d_tA_t, d_tA_t, F_t^{n-2}) \\
&= \frac{n(n-1)}{2} d\int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2\; SP(A_2 - A_3, A_1 - A_3, F_t^{n-2}) \\
&\equiv d\zeta(A_1, A_2, A_3)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

dove SP è la forma simmetrizzata del polinomio P, cioè:

$$SP(X_1, \ldots X_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} P(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$$

(in seguito indicheremo con Str la forma simmetrizzata della traccia del prodotto di n elementi di un'algebra di Lie). La (3.17) definisce $\zeta(A_1, A_2, A_3)$ a meno di un differenziale totale, e sarà quindi usata come sua definizione operativa.

CAPITOLO 4

Teorie di campo fenomenologiche

Abbiamo osservato l'esistenza di anomalie per le trasformazioni del gruppo chirale di flavor nel settore adronico del Modello Standard. Ricordiamo invece che, nel Modello Standard, le trasformazioni locali di gauge del gruppo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ (gruppo di gauge delle interazioni elettrodeboli) non sono anomale a causa della cancellazione tra i contributi dei quark e dei leptoni.

Le anomalie chirali di flavor del Modello Standard hanno varie conseguenze fisiche osservabili; noi ci concentreremo sulle conseguenze nella fisica adronica di bassa energia, ovvero sui decadimenti degli stati composti adronici che sono indotti dalla presenza delle anomalie chirali di flavor.

Il fatto che le anomalie abbiano o meno effetto sui processi fisici è stato argomento di discussione alla fine degli anni '60; ma ci si rese rapidamente conto che le anomalie chirali hanno di fatto notevoli conseguenze osservabili nella fisica adronica. Ad esempio l'anomalia chirale è responsabile del decadimento $\pi^0 \to \gamma\gamma$ che, se non teniamo conto di essa, risulta fortemente depresso (anzi, nel limite chirale, cioè di massa zero per i quark leggeri, risulta proibito). Invece il risultato che si ottiene, tenendo conto delle anomalie, per l'ampiezza di decadimento è in ottimo accordo con i dati sperimentali.

Dato che il calcolo esplicito di processi fra stati legati di quark, effettuato utilizzando la lagrangiana fondamentale del Modello Standard, risulterebbe estremamente complicato, risulta molto conveniente utilizzare il metodo delle teorie fenomenologiche di campo, basate sulle lagrangiane fenomenologiche di algebra delle correnti.

Questo è inoltre il formalismo utilizzato nel famoso articolo di Wess e Zumino [34], nel quale si illustra per la prima volta un metodo generale per legare le anomalie alle interazioni efficaci fra gli adroni. Questo capitolo è quindi dedicato ad un'introduzione all'argomento, con lo sviluppo di alcuni metodi e risultati che saranno utilizzati nei capitoli successivi.

L'idea di utilizzare teorie efficaci di campo, o equivalentemente *lagrangiane fenomenologiche*, legate alla rottura spontanea della simmetria chirale per descrivere i processi adronici a bassa energia risale alla fine degli anni '60 coi due lavori di Weinberg [30, 31][1]. Il metodo consiste nel descrivere le interazioni a bassa energia tra gli adroni, che corrispondono a stati legati di quark e gluoni, tramite una teoria efficace che utilizza come gradi di libertà solamente quelli corrispondenti agli stati legati realmente osservati. Quindi la lagrangiana fenomenologica non dipende dai campi dei quark e dei gluoni; dipende invece dai campi associati agli stati legati adronici, come i barioni dell'ottetto e del decupletto, i mesoni pseudoscalari, i mesoni vettoriali, le varie risonanze, eccetera. Inoltre, siccome la lagrangiana fenomenologica deve descrivere i processi di bassa energia (ovvero processi di bassa energia e momento trasferiti), tale lagrangiana può essere sviluppata in potenze delle derivate dei campi, poiché ogni derivata di un campo corrisponde ad una potenza del quadrimpulso.

Per calcolare le ampiezze di transizione per i vari processi, la lagrangiana fenomenologia va utilizzata solamente a livello ad albero perché tutti gli effetti a multiloop della teoria fondamentale sono già inclusi nei termini lagrangiani della lagrangiana fenomenologica. Tale lagrangiana deve inoltre rispettare tutte le proprietà di simmetria della teoria originale; in particolare, deve essere invariante (nel limite chirale) per trasformazioni globali del gruppo $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$ e deve riprodurre correttamente le anomalie chirali di flavor associate a trasformazioni locali di gauge del gruppo $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$.

Uno degli aspetti fondamentali su cui si basa la costruzione delle lagrangiane fenomenologiche per studiare la dinamica dei processi adronici è il fatto che la simmetria globale $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$ è rotta spontaneamente al sottogruppo vettoriale $SU(3)_V$, ed i corrispondenti bosoni di Goldstone sono identificati coi mesoni pseudoscalari fondamentali. Pertanto, nella lagrangiana fenomenologica, le trasformazioni di $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$ devono essere realizzate in maniera non–lineare, mentre le trasformazioni del sottogruppo $SU(3)_V$ devono essere realizzate linearmente.

In generale, la lagrangiana fenomenologica contiene tutti i termini che non sono

[1] Un riassunto dei risultati principali, con alcune osservazioni interessanti, si può trovare in [32].

proibiti per ragioni di simmetria e le relative costanti di accoppiamento devono essere determinate sperimentalmente. In realtà, esistono numerose relazioni tra le varie costanti di accoppiamento. Queste relazioni sono dettate dalle proprietà di simmetria della fisica adronica e, in effetti, l'insieme di tutte queste relazioni costituiscono il contenuto dei cosiddetti teoremi dell'algebra delle correnti. Per tener conto di tutte le relazioni che sono dettate dall'algebra delle correnti, si utilizzerà il metodo proposto da Callan, Coleman, Wess e Zumino [5, 4], generalizzazione della costruzione di Weinberg [31].

Questo capitolo è quindi dedicato alla descrizione del formalismo di CCWZ per la costruzione di lagrangiane fenomenologiche invarianti sotto un gruppo di gauge G, nel caso in cui la simmetria sia rotta spontaneamente ad un sottogruppo $H \subset G$. Sotto tali ipotesi avremo allora che i campi della teoria trasformeranno allora linearmente sotto l'azione di H, ma non sotto G, la cui azione sarà nonlineare [31]. Inoltre, dato che si ha rottura spontanea di simmetria, la teoria sarà caratterizzata dalla presenza di bosoni di Goldstone (massless) che, proprio perché hanno massa zero, rivestono un ruolo fondamentale nella dinamica a bassa energia.

Nella seconda parte del capitolo applicheremo poi il metodo generale al gruppo chirale $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$ per costruire lagrangiane fenomenologiche per il settore adronico del Modello Standard, nell'ipotesi di massa zero per i quark up, down e strange. Seguiranno poi alcune applicazioni, in modo da mostrare più in dettaglio il funzionamento e il tipo di risultati che si possono ottenere con questo metodo.

4.1 Struttura delle Lagrangiane fenomenologiche

Vogliamo costruire una teoria fenomenologica che descriva il limite di bassa energia di una teoria fondamentale con le seguenti proprietà:

- invarianza sotto un gruppo di gauge globale G, con G gruppo di Lie compatto, semisemplice e connesso;
- rottura spontanea della simmetria globale ad un sottogruppo di Lie $H \subset G$;
- eventuale invarianza locale di gauge rispetto a G o ad un suo sottogruppo di Lie.

La teoria fenomenologica dovrà avere le stesse simmetrie della teoria fondamentale: quello che vogliamo fare nei prossimi paragrafi è introdurre un metodo generale per ottenere lagrangiane invarianti. Riportiamo prima di tutto un importante risultato, ottenuto da Haag:

Osservazione 4.1. I risultati fisici non dipendono dalla particolare scelta della parametrizzazione per i campi della teoria fenomenologica, è sufficiente che siano campi interpolanti per le particelle che devono descrivere [11].

Questo implica che possiamo scegliere un particolare formalismo e una particolare scelta di coordinate locali senza perdere informazioni fisiche rilevanti.

Prima di entrare nel problema, descriviamo brevemente il "framework" in cui si lavorerebbe in assenza di rottura spontanea della simmetria:

- lo spazio–tempo è una varietà 4–dimensionale X (assumeremo per lo meno in questo capitolo $X = \mathbb{R}^4$ con la metrica di Minkowski);
- le sorgenti classiche sono rappresentate dai campi di gauge, descritti da connessioni su un fibrato G–principale [19] P che assumiamo banale: $P = X \times G$;
- è dato un insieme di campi (di materia), a valori in una varietà N (ad es. $N = \mathfrak{su}(3)$ per i mesoni vettoriali), su cui è definita un'azione $T : G \times N \to N$ di G, descritto [26] da sezioni $\phi : X \to E$ del fibrato associato $E = (P \times N)/G$;
- sui campi è definita una derivata covariante[2] ∇, con $\nabla\phi : TX \to E^\tau \equiv (P \times TN)/G$.

In presenza di rottura spontanea alcune di queste ipotesi saranno da modificare, come vedremo fra poco; inoltre avremo in più la presenza di bosoni di Goldstone associati ai generatori rotti, che possono essere descritti da campi a valori nello spazio omogeneo G/H.

Possiamo ora tornare a descrivere la struttura della teoria fenomenologica: scegliamo di utilizzare il formalismo introdotto da Callan, Coleman, Wess e Zumino (in seguito indicato come CCWZ)[5, 4], di cui daremo una breve esposizione.

4.1.1 Bosoni di Goldstone e fibrati ridotti

La rottura spontanea della simmetria (globale) implica l'esistenza di bosoni di Goldstone associati ai generatori "rotti" del gruppo di gauge. Sia $G \to H$ il pattern di rottura, e poniamo $\mathfrak{g} \equiv \mathrm{Lie}(G)$ e $\mathfrak{h} \equiv \mathrm{Lie}(H)$.

[2]Si veda l'Appendice A.

Posto $n = \dim G$, $d = \dim H$, scegliamo generatori $\{V_a\}_{a=1,\dots,d} \subset \mathfrak{h}$, del sottogruppo H, ortonormali rispetto al prodotto interno di Cartan [16], e completiamo ad una base ortonormale di $\mathfrak{g}$ aggiungendo dei generatori $\{A_b\}_{b=1,\dots,n-d} \subset \mathfrak{g}$. Allora ogni elemento $g \in G$, in un intorno dell'identità, può essere espresso nella forma

$$g = e^{\phi \cdot A} e^{u \cdot V}.$$

L'azione del gruppo su se stesso, per moltiplicazione a sinistra, definisce in modo naturale un'azione sulle variabili ϕ e u:

$$g_0 e^{\phi \cdot A} = e^{\phi' \cdot A} e^{u' \cdot V} \ \rightarrow \ \phi' = \phi'(\phi, g_0), \ \ u' = u'(\phi, g_0). \tag{4.1}$$

Chiamiamo ora ψ l'insieme dei campi di materia della teoria; essi devono trasformare linearmente sotto il sottogruppo non rotto H: esiste cioè una rappresentazione (unitaria) di H sullo spazio dei campi data da

$$h : \ \psi \mapsto D(h)\psi.$$

Quindi, se ora consideriamo la coppia di variabili (ϕ, ψ), abbiamo una realizzazione (non necessariamente lineare) di G:

$$g_0(\phi, \psi) = (\phi'(\phi, g_0), D(e^{u' \cdot V})\psi). \tag{4.2}$$

Si può facilmente verificare che tale azione, ristretta al sottogruppo H, si riduce ad una rappresentazione (lineare) di H.

Vogliamo ora classificare le azioni di gruppo compatibili con la teoria in esame, cioè le realizzazioni non lineari di G che ristrette ad H diventano lineari. Procediamo in maniera generale: supponiamo che l'insieme dei campi costituisca una varietà $\mathcal{M}$ m–dimensionale e che sia data un'azione continua di G su $\mathcal{M}$. Data l'importanza (ai fini dello sviluppo perturbativo etc.) di individuare un punto come lo zero dei campi, considereremo varietà dotate di un'origine O, cioè varietà puntate; inoltre restringiamo per ora la nostra analisi ad un intorno dell'origine di $\mathcal{M}$ e dell'identità di G. Definiamo H come il sottogruppo di G che lascia invariata l'origine di $\mathcal{M}$.

Osservazione 4.2. L'idea di identificare H come il sottogruppo che lascia invariata un'"origine" è strettamente legata alla descrizione dei bosoni di Goldstone: questi possono essere identificati (a meno di passare alla forma esponenziale) con lo spazio delle classi laterali G/H, e H è esattamente il sottogruppo che lascia invariata l'"origine" di G/H, cioè la classe $[H]$. Inoltre l'azione di H deve essere lineare perché, in accordo coi risultati generali della meccanica quantistica (in particolare il teorema di Wigner) ogni simmetria esatta è implementata da un operatore lineare.

Prima di proseguire è utile dimostrare un lemma [5]:

Lemma 4.3 (di linearizzazione)**.** *Siano $\mathcal{M}, G, H$ definiti come sopra. Allora esiste una carta locale $(\mathcal{U}, y)$ centrata in O rispetto alla quale l'azione di H è lineare; cioé esiste una rappresentazione D di H tale che $h \cdot y = D(h)y$.*

Dimostrazione. Notiamo prima di tutto che, dato che l'azione di G è continua e che H è il sottogruppo che lascia fisso un punto, H è chiuso e quindi compatto. Allora possiamo trovare una carta locale $(\mathcal{U}, x)$ tale che $\mathcal{U}$ sia H–invariante. Espandiamo quindi $g \cdot x$ in serie di potenze: $h \cdot x = D(h)x + O(x^2)$, con $D(\cdot)$ rappresentazione (lineare) di H. Ora, sia dh la misura di Haar su H; possiamo allora definire nuove coordinate y come

$$y(x) = \int dh D^{-1}(h) h \cdot x.$$

Segue che le y sono funzioni analitiche di x, e inoltre $y = x + O(x^2)$. Sotto l'azione di $h_0 \in H$ avremo ora

$$h_0 \cdot y = \int dh D^{-1}(h) h \cdot h_0 \cdot x = \int d(hh_0) D^{-1}(hh_0h_0^{-1}) hh_0 \cdot x = D(h_0)y.$$

□

Introduciamo ora generatori A_i, V_i come sopra. Sia $\mathcal{N}$ la sottovarietà di $\mathcal{M}$ data dall'orbita dell'origine: $\mathcal{N} \equiv \{g \cdot O\} = G \cdot O$. Ad ogni insieme di parametri $\phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_{n-d}\}$ possiamo associare un punto $e^{\phi \cdot A} O \in \mathcal{N}$; è chiaro che, almeno in un intorno dell'origine, questa corrispondenza è biunivoca (e possiamo anche assumere che abbia la stessa regolarità dell'azione di G). L'azione di G su $\mathcal{N}$, in queste coordinate, è completamente determinata dalle (4.1). Vogliamo completare ad una carta locale di $\mathcal{M}$ centrata in O; introduciamo quindi $m - (n - d)$ coordinate, che indicheremo con ψ, facendo in modo che, sempre in un intorno dell'origine, $\mathcal{N}$ sia costituita dai punti di coordinate $(\phi, \psi = 0)$. Dato che $\mathcal{N}$ è stabile sotto G, per il lemma di linearizzazione possiamo scegliere le coordinate (ϕ, ψ) in modo che su di esse H agisca linearmente. Inoltre, a meno di ridefinire $(\phi, \psi) \to e^{\phi \cdot A}(0, \psi)$ (notare che tale trasformazione è un diffeomorfismo locale, dato che nell'origine ha Jacobiano non nullo), l'azione di G si può scrivere nella forma:

$$g(\phi, \psi) = (\phi', D(e^{u' \cdot V})\psi) \tag{4.3}$$

dove ϕ', u' sono quelli dati dalle (4.1). Da ora in poi chiameremo T_a i generatori di H nella rappresentazione D ($T_a = D_* V_a$); in particolare l'azione su ψ si scriverà $\psi' = e^{u' \cdot T}\psi$.

Commentiamo quanto abbiamo ricavato finora: i bosoni di Goldstone sono associati alle mappe da X (lo spazio–tempo) in G/H; almeno localmente, inoltre, l'azione di H sugli altri campi della teoria può essere assunta lineare.

Vogliamo ora riformulare i risultati in modo da renderli immediatamente applicabili a teorie di gauge e validi globalmente, non solo in un intorno dell'origine. Per cominciare, notiamo che quanto ricavato precedentemente equivale a richiedere che i campi di materia, esclusi i bosoni di Goldstone, siano descritti da sezioni di fibrati associati non ad un fibrato G–principale, ma da un fibrato H–principale, in quanto è solo il sottogruppo esatto H ad agire linearmente. Quindi dobbiamo ridurre in qualche modo il fibrato G–principale P ad un fibrato H–principale Q, con spazio base lo spazio–tempo e fibra diffeomorfa ad H; i campi dei bosoni di Goldstone possono invece essere identificati (a meno di passare alla forma esponenziale) con le sezioni di un fibrato $K = (P \times M)/G$ dove M è una varietà diffeomorfa allo spazio omogeneo G/H [23, 26]. Diamo quindi la seguente definizione per i campi che descrivono i bosoni di Goldstone (nella forma esponenziale):

Definizione 4.4. *Sia M uno spazio omogeneo (identificabile con G/H tramite un diffeomorfismo $\chi : M \to G/H$); un* campo di Goldstone *è una sezione $\Xi : X \to K$ del fibrato $K = (P \times M)/G$*

Vediamo ora che ad ogni campo di Goldstone corrisponde una riduzione del fibrato P ad un sottofibrato Q. Sia $\pi : G \to G/H$ la proiezione al quoziente e sia ($U \subset X, \eta_K : U \times G/H \to K$) una banalizzazione locale[3] di K (indotta da una banalizzazione locale η di P); in coordinate locali $\Xi(x) = \eta_K(x, \xi(x))$ e P si riduce al fibrato H–principale Q:

$$Q \equiv \{\eta(x, g) \in P | x \in U, g \in \mu^{-1}(\chi \circ \xi(x))\} \tag{4.4}$$

(al variare di U in un ricoprimento di X); inoltre tale riduzione è possibile se e solo

[3]Si veda il paragrafo 4.1.4.

se esiste un campo di Goldstone (anzi, le riduzioni sono in corrispondenza biunivoca con i campi di Higgs). Infatti [19]:

Proposizione 4.5. *Il gruppo di struttura G di un fibrato principale $P(X, G)$ è riducibile ad un sottogruppo chiuso H se e solo se esiste una sezione globale del fibrato associato K, $\xi : X \to K = (P \times G/H)/G = P/H$.*

Dimostrazione. Supponiamo G sia riducibile ad H; sia Q il fibrato ridotto, immerso in P via un omomorfismo di fibrati iniettivo $\iota : Q \to P$. Sia inoltre $\mu : P \to P/H$ la proiezione al quoziente. Presi ora a, b nella stessa fibra di Q, $\exists h \in H$ tale che $a = bh$ e quindi $\mu(\iota(a)) = \mu(\iota(b)h) = \mu(\iota(b))$; cioè $\mu \circ \iota$ è costante su ogni fibra di Q e quindi induce una mappa (sezione) $\xi : X \to K$ data da $\xi(x) = \mu(\iota(b))$ dove $x = \pi(\iota(b))$ ($\pi : P \to X$ è la proiezione sulla base).

Viceversa, data una sezione $\xi : X \to K$, definiamo Q come l'insieme dei punti $p \in P$ tali che $\mu(p) = \xi(\pi(p))$ (in accordo con la (4.4)). Per ogni $x \in X$ esiste $q \in Q$ tale che $\pi(q) = x$; inoltre dati q, r nella stessa fibra di P, con $q \in Q$, allora $r \in Q$ se e solo se $\exists h \in H$ tale che $r = qh$. Segue allora (le orbite sono chiuse) che Q è una sottovarietà chiusa di P ed è un fibrato H–principale. □

4.1.2 Campi di materia

In assenza di rottura spontanea di simmetria, i campi di materia possono essere descritti come sezioni $\psi : X \to E$ del fibrato associato $E \equiv (P \times N)/G$, dove N è una varietà su cui è definita un'azione di G; in tutti i casi di interesse N sarà uno spazio vettoriale, supporto di una rappresentazione di G (e sarà chiaramente questa l'ipotesi sotto la quale si parlerà di azione lineare di G o di H). In presenza di rottura spontanea solo il sottogruppo H agisce linearmente, quindi bisogna "ridurre" anche i campi di materia; la proposizione seguente [26] garantisce la possibilità di passare a sezioni di un fibrato associato a Q.

Proposizione 4.6. *A ogni sezione $\psi : (P \times N)/G$ corrisponde una sezione $\widetilde{\psi} : X \to E_Q$, dove $E_Q = (Q \times N)/H$ è un fibrato associato a Q.*

Dimostrazione. La costruzione si può fare direttamente in coordinate locali; rimandiamo quindi alla proposizione 4.8 per la dimostrazione. □

Definizione 4.7. *Chiamiamo* campi ridotti *le sezioni di E_Q ottenute come nella proposizione precedente.*

4.1.3 Campi di gauge e derivate covarianti

Abbiamo definito quelli che saranno i campi di materia della teoria effettiva, ora dobbiamo introdurre i campi di gauge e definire le derivate covarianti. Anche in questo caso sarà necessario un processo di "riduzione", per tener conto della rottura della simmetria globale. Supponiamo di voler introdurre campi di gauge per il gruppo G (o per un suo sottogruppo): questi sono definiti da connessioni sul fibrato principale P. Sia allora $\omega : TP \to \mathfrak{g}$ una connessione su P; questa induce in modo naturale[4] una derivata covariante sulle sezioni del fibrato associato E.

Consideriamo ora il sottofibrato $Q \subset P$: possiamo restringere la connessione ω a Q ottenendo una forma $\widetilde{\omega} \equiv \omega|_Q$ a valori in $\mathfrak{g}$. Supponiamo ora che $\mathfrak{g}$ ammetta la decomposizione $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}$ con $\mathrm{Ad}(h)\mathfrak{k} \subset \mathfrak{k}\ \ \forall h \in H$; dato che $\mathfrak{h}$ è l'algebra di Lie di H, $\mathfrak{k}$ può essere identificato con $T_{[H]}G/H$. Ora, Q è un fibrato H–principale quindi una connessione su Q deve essere a valori in $\mathfrak{h}$: si ottiene facilmente che la proiezione di $\widetilde{\omega}$ su $\mathfrak{h}$ dà una connessione ν a valori in $\mathfrak{h}$ su Q; la differenza $\alpha = \widetilde{\omega} - \nu$ è allora una 1–forma orizzontale su Q a valori in $\mathfrak{k}$.

Passiamo alla costruzione delle derivate covarianti: sul fibrato E abbiamo la derivata covariante ∇ indotta da ω. Analogamente su $K \simeq (P \times G/H)/G$, visto che anch'esso è un fibrato associato a P. Su E_Q abbiamo invece la derivata covariante $\widetilde{\nabla}$ indotta dalla connessione ν; l'espressione in coordinate locali sarà data più avanti, per ora ci limitiamo ad osservare che (come d'altronde ci aspettavamo) che $\widetilde{\nabla}\widetilde{\Xi} = 0$, cioè la riduzione del campo di Goldstone è costante rispetto ad α.

4.1.4 Descrizione in coordinate locali – campi di materia

Vogliamo tradurre in coordinate locali quanto discusso nei paragrafi precedenti. Dato che abbiamo assunto banale il fibrato principale P, quest'ultimo ammette banalizzazioni globali. In particolare queste sono in corrispondenza biunivoca con le sezioni globali $q : X \to P$; infatti se $\eta : X \times G \to P$ è una banalizzazione locale $\exists q$ tale che $\eta(x, g) = q(x)g$ e, viceversa, una sezione $q : X \to P$ definisce nello stesso modo una banalizzazione η. La scelta di una banalizzazione globale (e quindi di una sezione di P) è l'equivalente matematico di una *scelta di gauge*.

A ogni banalizzazione di P corrisponde una banalizzazione del fibrato associato E, $\eta_E : X \times N \to E$ con $\eta_E(x, n) = \pi_E(q(x), n)$ dove $\pi_E : P \times N \to E$ è la proiezione

[4] Si veda l'Appendice A.

al quoziente.

Vogliamo ora introdurre coordinate locali per il fibrato ridotto Q. Prima di tutto notiamo che se lo spazio omogeneo M si può identificare con G/H allora esiste un $m \in M$ tale che H sia gruppo di isotropia di m; inoltre sottolineiamo che il fatto che P sia banale non implica che lo sia anche Q, quindi, in generale, non sarà possibile descrivere Q con un'unica carta. Consideriamo allora un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di X tale che per ogni $\alpha \in I$ esiste una mappa $g_\alpha : U_\alpha \to G$ che soddisfa

$$\xi(x) = F(g_\alpha(x))m \quad \text{per } x \in U_\alpha \tag{4.5}$$

(dove $F : G \times M \to M$ è l'azione di G su M). Ora, utilizzando le notazioni dei paragrafi precedenti e definendo $\zeta \equiv \chi \circ \xi$, avremo per $x \in U_\alpha$: $\mu^{-1}(\zeta(x)) = g_\alpha(x)H$, da cui, usando la (4.4)

$$\pi_Q^{-1}(U_\alpha) = \{\eta(x, g_\alpha(x)h) \in P \mid x \in U_\alpha, h \in H\}.$$

Possiamo quindi definire una collezione di sezioni locali $q_\alpha : U_\alpha \to Q$ date da:

$$q_\alpha(x) = q(x)g_\alpha(x). \tag{4.6}$$

A queste corrisponde una collezione di banalizzazioni locali di Q, $\{\eta_\alpha : U_\alpha \times H \to Q\}_{\alpha \in I}$, date da:

$$\eta_\alpha(x, h) = q_\alpha(x)h = \eta(x, g_\alpha(x)h). \tag{4.7}$$

Si possono scrivere subito anche le funzioni di transizione: preso $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ abbiamo $F(g_\alpha(x))m = F(g_\beta(x))m$ e quindi

$$h_{\alpha\beta}(x) \equiv g_\alpha(x)^{-1}g_\beta(x) \in H \tag{4.8}$$

definisce la funzione di transizione per $U_\alpha \cap U_\beta$.

Rimane solo da scrivere in coordinate locali i campi di materia (ridotti). Riprendiamo quindi il fibrato associato $E_Q = (Q \times N)/H$, con la proiezione canonica $\pi_{E_Q} : Q \times N \to E_Q$; ad ogni insieme di banalizzazioni locali $\{\eta_\alpha\}$ di Q associamo una collezione di banalizzazioni $\{\eta_\alpha^E : U_\alpha \times N \to E_Q\}$ di E_Q:

$$\eta_\alpha^E(x, n) = \pi_{E_Q}(q_\alpha(x), n).$$

Possiamo ora riformulare la proposizione 4.6 in coordinate locali:

Proposizione 4.8. *A ogni sezione $\psi : (P \times N)/G$ (data in coordinate locali da $\psi(x) = \eta_E(x, n(x))$) corrisponde una sezione $\widetilde{\psi} : X \to E_Q$, dove $E_Q = (Q \times N)/H$ è un fibrato associato a Q. In coordinate locali:*

$$\psi_\alpha(x) = \eta_\alpha^E(x, T(g_\alpha^{-1}(x))n(x)) \equiv \eta_\alpha^E(x, n_\alpha(x))$$

dove T è l'azione di G su N.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che la famiglia $\{\psi_\alpha\}$ definisce una sezione di E_Q, cioè che $\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ $\psi_\alpha(x) = \psi_\beta(x)$. Dato che le funzioni di transizione per Q sono definite dalla (4.8) avremo:

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(x) &= \pi_{E_Q}(q_\alpha(x), n_\alpha(x)) = \pi_{E_Q}(q_\beta(x)h_{\alpha\beta}(x)^{-1}, T(h_{\alpha\beta}(x))n_\beta) \\ &= \pi_{E_Q}(q_\beta, n_\beta) = \psi_\beta(x)\end{aligned} \tag{4.9}$$

che prova che le ψ_α definiscono una sezione globale di E_Q. □

Per quanto riguarda la riduzione del campo che descrive i bosoni di Goldstone abbiamo il seguente risultato:

Proposizione 4.9. *Il campo ridotto $\widetilde{\Xi}$ associato ad un campo di Goldstone Ξ è un campo costante, invariante per trasformazioni di gauge relative al sottogruppo esatto H.*

Dimostrazione. $\widetilde{\Xi}$ è localmente definito da sezioni $\Xi_\alpha : U_\alpha \to K_Q = (Q \times M)/H$ date da:

$$\Xi_\alpha(x) = \eta_\alpha^K(x, F(g_\alpha^{-1})(x)\xi(x)) = \eta_\alpha^K(x, m).$$

□

4.1.5 Descrizione in coordinate locali – campi di gauge

Concludiamo con questo paragrafo la formulazione in coordinate locali; quello che rimane da scrivere sono le connessioni di gauge e le derivate covarianti dei campi di materia e dei bosoni di Goldstone. Sia quindi ω una connessione su P; in coordinate locali, fissata una sezione q di P (cioè una gauge), abbiamo per il campo di gauge: $\Gamma_q = q^*\omega$ ($\Gamma_q(x) : T_xX \to \mathfrak{g}$, cioè è una 1–forma sullo spazio–tempo X). Vogliamo ora scrivere in coordinate locali $\widetilde{\omega}$, cioè la restrizione a Q della connessione di gauge; dalle

(4.6) (4.7) segue, utilizzando l'usuale legge di trasformazione dei campi di gauge[5],

$$\Gamma_{q_\alpha(x)} = \mathrm{Ad}(g_\alpha^{-1}(x))\Gamma_{q(x)} + g_\alpha^{-1}(x)dg_\alpha(x). \tag{4.10}$$

Osservazione 4.10. In assenza di campi di gauge, cioè per $\Gamma_q = 0$, la (4.10) si riduce alla forma di Maurer–Cartan relativa alla sezione locale q_α, determinata quindi[6] dal campo di Goldstone Ξ.

Come abbiamo visto nei paragrafi precedenti possiamo scrivere $\widetilde{\omega}$ nella forma $\widetilde{\omega} = \alpha + \nu$. Vogliamo descrivere in coordinate locali le due 1–forme; fissiamo allora una banalizzazione locale (U_σ, η_σ) e prendiamo $x \in U_\sigma,\ Y \in T_xU_\sigma$. Sia inoltre[7] $K_t = (P \times \mathfrak{k})/H$. Allora, se q_σ è la sezione locale associata ad η_σ,

$$\alpha_x(Y) = \eta^\sigma_{K_t}(x, \alpha^\sigma_x(Y))$$

dove $\alpha^\sigma = q^*_\sigma\alpha = (\Gamma_{q_\sigma})_{\mathfrak{k}}$ è la proiezione del potenziale di Yang–Mills Γ_{q_σ} su $\mathfrak{k}$ e $\eta^\sigma_{K_t}$ è la banalizzazione locale di K_t indotta da η_σ.

Rimane ora da scrivere in coordinate locali la derivata covariante dei campi di materia. Sia allora $\widetilde{\varphi} : X \to E_Q$ un campo ridotto, che scriveremo in coordinate locali nella forma $\widetilde{\varphi}(x) = \eta^\sigma_{E_Q}(x, \varphi^\sigma(x))$. La sua derivata covariante[8] $\widetilde{\nabla}\widetilde{\varphi}$ è una 1–forma a valori nel fibrato associato $E^t_Q = (Q \times TN)/H$, che localmente possiamo scrivere (dalle (A.1), (A.2)) come:

$$\widetilde{\nabla}\widetilde{\varphi}_x(Y) = \eta^\sigma_{E^t_Q}(x, \widetilde{\nabla}\varphi^\sigma_x(Y))$$

dove

$$\widetilde{\nabla}\varphi^\sigma_x(Y) = d\varphi^\sigma_x(Y) + (T_{\varphi^\sigma(x)})_*(\Gamma_{q_\sigma(x)}(Y))_{\mathfrak{h}}. \tag{4.11}$$

Per i bosoni di Goldstone abbiamo invece il seguente risultato:

Proposizione 4.11. *La derivata covariante del campo di Goldstone ridotto $\widetilde{\Xi}$ è data dalla 1–forma α:*

$$\nabla\widetilde{\Xi} = \alpha \tag{4.12}$$

dove ∇ è la derivata covariante indotta da ω su K_Q.

Dimostrazione. In coordinate locali $\widetilde{\Xi}$ è descritto da mappe $\xi_\sigma : U_\sigma \to M \simeq G/H$;

[5] Si veda il capitolo 1.
[6] Segue dalla (4.5).
[7] Si veda l'Appendice A per i dettagli.
[8] Si veda l'Appendice A.

inoltre, come visto nella proposizione 4.9, tali mappe sono costanti. Allora, preso $Y \in T_x U_\sigma$, abbiamo

$$(\nabla \xi_\sigma)_x(Y) = (\Gamma_{q_\sigma(x)}(Y))_{\mathfrak{k}} = \alpha^\sigma_x(Y).$$

□

4.1.6 Leggi di trasformazione

Per giustificare alcune delle affermazioni fatte nei paragrafi precedenti (tra cui il fatto che ν sia una connessione) e per poter lavorare sulla teoria fenomenologica dobbiamo ora ricavare le leggi di trasformazione dei campi di Higgs e dei campi ridotti.

Come prima cosa vogliamo vedere come trasformano le coordinate dei campi per un cambio di carta[9]; consideriamo quindi due banalizzazioni locali[10] (U_α, η_α) e (U_β, η_β) di Q, con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Perchè Ξ sia ben definito è necessario che

$$F(g_\alpha(x))m = F(g_\beta(x))m$$

quindi $h_{\alpha\beta}(x) \equiv g_\alpha^{-1}(x) g_\beta(x) \in H$, dove $h_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to H$ è la funzione di transizione per $U_\alpha \cap U_\beta$. Da quanto appena ricavato segue che, se η, η' sono due banalizzazioni di P, allora:

$$g'_\alpha(x) = g^{-1}(x) g_\alpha(x) h_\alpha(x) \tag{4.13}$$

con $h_\alpha : U_\alpha \to H$ e $g(x)$ definito da: $q'(x) = q(x)g(x)$. Per quanto riguarda le banalizzazioni locali η_α e η'_α di Q si ricava inoltre:

$$\eta'_\alpha(x, h) = \eta_\alpha(x, h_\alpha(x)h).$$

Passiamo ora ai campi di materia ridotti: consideriamo la sezione $\widetilde{\varphi}$ di E_Q, $\widetilde{\varphi}(x) = \eta^E_\alpha(x, \varphi_\alpha(x)) = {\eta'}^E_\alpha(x, \varphi'_\alpha(x))$; allora:

$$\varphi'_\alpha(x) = T(h_\alpha^{-1}(x))\varphi_\alpha(x). \tag{4.14}$$

Osservazione 4.12. Consideriamo una trasformazione di gauge globale (cioè $q(x) \mapsto q'(x) = q(x)g$ con $g \in G$ costante); le (4.13), (4.14) implicano che l'azione di G sui campi di materia si riduce all'azione del sottogruppo esatto H, ma diventa un'azione

[9] Ricordiamo che effettuare una trasformazione di gauge corrisponde a modificare la scelta delle banalizzazioni locali, e quindi in coordinate la trasformazione corrisponde ad un cambio di carta locale.

[10] Per la definizione delle funzioni utilizzate di seguito vedere le equazioni (4.6), (4.7).

"locale" (cioè h_α dipende da x): questo è uno degli aspetti caratterizzanti le teorie fenomenologiche con rottura spontanea di simmetria [5, 4].

Resta da vedere come trasformano le forme α e ν; per fare questo partiamo dalla descrizione in coordinate locali della restrizione $\widetilde{\omega}$ della forma di connessione ω, equazione (4.10): confrontando le due espressioni per Γ_{q_α} e $\Gamma_{q'_\alpha}$ e utilizzando la (4.13) si ottiene immediatamente che:

$$\Gamma_{q'_\alpha(x)} = \mathrm{Ad}(h_\alpha^{-1}(x))\Gamma_{q_\alpha(x)} + h_\alpha^{-1}(x)dh_\alpha(x) \tag{4.15}$$

In particolare, ricordando che α e ν sono le proiezioni rispettivamente su $\mathfrak{k}$ e su $\mathfrak{h}$ di $\widetilde{\omega}$, segue che α trasforma in modo covariante (cioè secondo la rappresentazione aggiunta), mentre ν trasforma come una connessione di gauge.

Riassumendo: una trasformazione di gauge $g : X \to G$ induce trasformazioni locali $h_\alpha : U_\alpha \to H$ e rispetto alle h_α:

- i campi di materia ridotti trasformano in modo covariante;
- la 1–forma α, che rappresenta la derivata covariante del campo dei bosoni di Goldstone, trasforma in modo covariante;
- la 1–forma ν, con cui si costruiscono le derivate covarianti dei campi di materia, trasforma come una connessione.

4.2 Costruzione di Lagrangiane fenomenologiche

Quanto fatto nei paragrafi precedenti ci permette ora di descrivere le caratteristiche principali di una teoria fenomenologica con rottura spontanea di simmetria: l'insieme dei campi sarà dato da un campo ξ che descrive i bosoni di Goldstone (nella forma esponenziata) e da campi di materia ridotti ψ (per semplicità di notazione ridefiniamo $\widetilde{\psi} \to \psi$), che trasformano secondo una rappresentazione T del sottogruppo esatto H; avremo inoltre i campi di gauge, contenuti nelle 1–forme α e ν. Assumiamo in seguito di lavorare in una carta locale (supponiamo quindi fissate le opportune banalizzazioni locali) e omettiamo gli indici $\alpha \in I$.

La dinamica sarà descritta da un funzionale di azione effettiva che possiamo scrivere nella forma

$$\Gamma = \int d^4x\, \mathscr{L} + \Gamma_{an}$$

dove Γ_{an} è un funzionale introdotto per tenere conto dell'eventuale presenza di anomalie[11], mentre $\mathscr{L}$ è una densità lagrangiana che supponiamo di poter scrivere come

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{inv} + \mathscr{L}_{sb} \; (+\mathscr{L}_{GF})$$

dove $\mathscr{L}_{inv}$ è una densità lagrangiana invariante sotto l'azione locale del sottogruppo esatto H, $\mathscr{L}_{sb}$ contiene i termini che rompono esplicitamente l'invarianza di gauge (globale), come ad esempio termini di massa per i bosoni di Goldstone, nel caso in cui la simmetria globale sia solo approssimata. L'ultimo termine rappresenta un eventuale gauge fixing per i campi di gauge; nella discussione che segue in ogni caso verrà trascurato.

Consideriamo ora la parte invariante: la densità lagrangiana $\mathscr{L}_{inv}$ sarà [4] una funzione dei campi ξ, ψ e delle derivate covarianti $D_\mu\xi, \nabla_\mu\psi$, dove la derivata covariante del campo di Goldstone ξ è indotta da α, equazione (4.12), mentre quella dei campi di materia ridotti ψ è data dalla derivata covariante $\widetilde{\nabla}$ e descritta in coordinate locali dalla (4.11); quindi:

$$\mathscr{L}_{inv} = \mathscr{L}_{inv}(\xi, \psi, D_\mu\xi, \nabla_\mu\psi).$$

L'invarianza di gauge permette ora di dimostrare una delle proprietà fondamentali delle lagrangiane fenomenologiche: nel caso in cui si mettano a zero i campi di gauge, la lagrangiana dipende solamente dalle derivate (covarianti) dei campi dei bosoni di Goldstone, come segue dalla proposizione seguente.

Proposizione 4.1. *In assenza di connessioni di gauge una lagrangiana invariante soddisfa:*

$$\mathscr{L}(\xi, \psi, \partial_\mu\xi, \partial_\mu\psi) = \mathscr{L}(0, \psi, D_\mu\xi, \nabla_\mu\psi)$$

Dimostrazione. Consideriamo una trasformazione di gauge descritta localmente da $g_\alpha^{-1}(x)$; l'effetto sul campo di Goldstone ξ è quello di ridurlo ad un campo costante, uguale ad m, che senza perdita di generalità possiamo identificare con lo 0 della teoria. I campi di materia trasformano poi in modo covariante secondo una famiglia di trasformazioni $h_\alpha(x) \in H$ indotte dalle g_α^{-1}, e quindi la dipendenza da essi rimane la stessa. Rimane da mostrare che le derivate spaziali diventano derivate covarianti; ma questo segue dalla (4.10) e dalle definizioni delle derivate covarianti dei campi di Higgs (4.12) e dei campi di materia (4.11). □

[11] Il prossimo capitolo sarà dedicato allo studio e alla costruzione di questo funzionale, per ora vogliamo concentrarci sul primo termine, quello "non anomalo".

Corollario 4.2. Una lagrangiana $\mathscr{L}$ che dipende dai campi di materia ψ e dalle derivate covarianti $D_\mu\xi$, $\nabla_\mu\psi$ è invariante sotto l'azione di G se e solo se è superficialmente invariante sotto l'azione (locale) di H.

Dimostrazione. Segue dalla proposizione precedente e dalle leggi di trasformazione dei campi ψ e delle derivate covarianti. □

Il risultato appena dimostrato è piuttosto rilevante: vincola infatti in modo molto forte i possibili termini lagrangiani che descrivono gli accoppiamenti fra i bosoni di Goldstone e i campi di materia, imponendo che essi devono essere sempre riconducibili ad accoppiamenti con le derivate dei campi dei bosoni di Goldstone.

4.3 Modello chirale $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$

Vogliamo ora applicare le considerazioni dei paragrafi precedenti al settore adronico del Modello Standard: consideriamo i tre quark leggeri (u, d, s) – che assumiamo massless – e quindi una teoria invariante sotto il gruppo di flavor $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$. Includiamo inoltre le connessioni di gauge relative alle interazioni elettrodeboli, quindi al sottogruppo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. La simmetria di flavor è rotta spontaneamente al sottogruppo vettoriale $SU(3)_V$, e i bosoni di Goldstone possono essere identificati con i mesoni pseudoscalari fondamentali.

La teoria fenomenologica sarà descritta quindi da un campo di Goldstone ξ che supponiamo di poter parametrizzare come esponenziale dei campi dei mesoni pseudoscalari:

$$\xi = e^{i\phi/f_\pi}$$

dove[12] $f_\pi \simeq 93\text{MeV}$ è la costante di decadimento del pione e $\phi = \gamma_5 \sum_i \phi_i \lambda_i$ (λ_i sono le matrici di Gell–Mann); l'identificazione con i mesoni pseudoscalari è la seguente:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \overline{K}^0 & -\frac{2\eta}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

[12] Vedremo poco più avanti, quando scriveremo la parte cinetica della lagrangiana fenomenologica, che questa è la normalizzazione corretta.

Nella definizione del campo che descrive i mesoni pseudoscalari abbiamo assunto[13] $m = \mathrm{Id}$, e abbiamo scelto una parametrizzazione comoda di ξ, che coinvolge solo i generatori assiali.

Come visto nel capitolo precedente la derivata covariante del campo dei pioni è data da $\nabla\xi = \alpha$. In coordinate locali possiamo allora definire il quadrivettore

$$a_\mu \equiv \nabla_{\partial/\partial x^\mu}\xi = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$$

a valori in $\mathfrak{g}$ (più precisamente, a valori in $\mathfrak{k}$); dalla (4.15) segue che a_μ trasforma in modo covariante.

Analogamente possiamo associare alla connessione ν un campo v_μ, che trasforma come un campo di gauge, a valori in $\mathfrak{h}$:

$$v_\mu \equiv \nu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right).$$

Nella teoria si possono inoltre includere, come vedremo più avanti, i campi di materia associati ai barioni e agli altri mesoni; notiamo subito che, per costruzione, una teoria effettiva per il modello chirale costruita con gli strumenti sviluppati in questo capitolo soddisfa automaticamente l'algebra delle correnti e ne riproduce quindi tutti i risultati rilevanti.

Nel caso chirale $SU(N)_R \otimes SU(N)_L$ rotto spontaneamente a $SU(N)_V$ è possibile introdurre una notazione semplificata, che è quella poi comunemente utilizzata: si passa ad una rappresentazione in termini di campi tutti a valori in $\mathfrak{su}(N)$ o $SU(N)$, definendo (tralasciamo per un attimo le costanti di normalizzazione):

$$e^{i\varphi} = e^{i\phi^a T^a}, \quad \mathcal{V}_\mu = V_\mu^a T^a, \quad \mathcal{A}_\mu = A_\mu^a T^a$$

dove i T^a sono i generatori di $\mathfrak{su}(N)$. Con questa nuova notazione possiamo scrivere esplicitamente a_μ e v_μ in una forma che può essere trattata senza troppe difficoltà:

$$\begin{aligned} 2iv_\mu \equiv 2iv_\mu^a T^a = {} & e^{-i\varphi}\partial_\mu e^{i\varphi} + ie^{-i\varphi}(\mathcal{V}_\mu + \mathcal{A}_\mu)e^{i\varphi} \\ & + e^{i\varphi}\partial_\mu e^{-i\varphi} - ie^{i\varphi}(\mathcal{V}_\mu - \mathcal{A}_\mu)e^{-i\varphi}, \end{aligned}$$

[13] La notazione è quella adottata nei paragrafi precedenti: m è l'elemento di $G = SU(3)_R \otimes SU(3)_L$ di cui $H = SU(3)_V$ è gruppo di isotropia.

$$2ia_\mu \equiv 2ia_\mu^a T^a = e^{-i\varphi}\partial_\mu e^{i\varphi} + ie^{-i\varphi}(\mathcal{V}_\mu + \mathcal{A}_\mu)e^{i\varphi}$$
$$- e^{i\varphi}\partial_\mu e^{-i\varphi} + ie^{i\varphi}(\mathcal{V}_\mu - \mathcal{A}_\mu)e^{-i\varphi}.$$

Sviluppando in serie queste due espressioni otteniamo:

$$\begin{aligned} v_\mu &\simeq \mathcal{V}_\mu + i[\mathcal{A}_\mu, \varphi] + \dots \\ a_\mu &\simeq \partial_\mu \phi + \mathcal{A}_\mu - i[\mathcal{V}_\mu, \varphi] + \dots \end{aligned} \tag{4.17}$$

Prima di concludere questo paragrafo vogliamo menzionare la possibilità di adottare una definizione leggermente diversa per il campo che descrive i bosoni di Goldstone (spesso utilizzata in letteratura al posto di quella descritta poco sopra). La costruzione è valida per ogni teoria con rottura spontanea di simmetria il cui pattern di rottura $G \to H$ soddisfi la seguente condizione[14]: esiste un automorfismo ρ di G tale che il suo differenziale agisca sull'algebra di Lie nel seguente modo:

$$V_i \mapsto V_i, \qquad A_i \mapsto -A_i$$

dove i V_i sono generatori di $\mathfrak{h}$ e gli A_i sono generatori di $\mathfrak{g}$ ortogonali ai V_i (sono quindi generatori "rotti"); notiamo che questo è vero nel caso chirale: l'automorfismo è quello indotto dall'operatore di parità. In questo caso, allora, per ogni $g \in G$ avremo:

$$ge^{\xi\cdot A} = e^{\xi'\cdot A}e^{u'\cdot V}, \qquad \rho(g)e^{-\xi\cdot A} = e^{-\xi'\cdot A}e^{u'\cdot A}$$

quindi:

$$ge^{2\xi\cdot A}\rho(g^{-1}) = e^{2\xi'\cdot A} \tag{4.18}$$

(da cui si vede, fra l'altro, che l'azione di G su ξ diventa lineare quando ristretta ad H). Possiamo quindi definire $U \equiv e^{2i\phi}$ e ottenere un campo che trasforma come in (4.18). Descrivere la teoria in termini di ξ o di U è equivalente, in quanto si tratta semplicemente di una riparametrizzazione.

4.4 Esempi e applicazioni

Concludiamo questo capitolo con alcune applicazioni delle teorie fenomenologiche di campo, in modo da mostrarne un po' più in dettaglio il funzionamento e la rilevanza fisica.

[14] Qui riprendiamo la notazione utilizzata all'inizio del capitolo.

4.4.1 Mesoni pseudoscalari

Come abbiamo visto nella sezione precedente, i mesoni pseudoscalari possono essere considerati come i bosoni di Goldstone associati alla rottura spontanea della simmetria di flavor con pattern $SU(3)_R \otimes SU(3)_L \to SU(3)_V$ e quindi possiamo associare ad essi un campo di Goldstone ξ.

Vogliamo ora costruire una lagrangiana effettiva per i mesoni pseudoscalari: cominciamo col termine "cinetico" che possiamo supporre di scrivere nella forma

$$\mathscr{L}_{kin} = -\frac{1}{2} f_\pi^2 \mathrm{Tr}(a^\mu a_\mu) \tag{4.19}$$

Utilizzando gli sviluppi (4.17) si vede subito che la (4.19) contiene l'usuale termine cinetico di un multipletto di campi scalari: $-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi)$. A questa prima parte di lagrangiana possiamo poi sommare tutti i termini di interazione che vogliamo introdurre nella teoria, a patto che siano in accordo con la costruzione precedente e che quindi risultino gauge invarianti. Possiamo poi sommare anche termini che rompono esplicitamente l'invarianza di gauge globale, per tener conto del fatto che la simmetria chirale è solo una simmetria approssimata del Modello Standard; dato che la simmetria globale è rotta dalle masse dei quark introduciamo il corrispondente termine di massa per i mesoni pseudoscalari: per fare questo scegliamo di utilizzare il campo $U \equiv e^{2i\phi^a T^a / f_\pi}$ e di introdurre la matrice di massa associata ai tre quark leggeri, in modo da legare le masse alla simmetria chirale:

$$\mathcal{M} \equiv \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} \tag{4.20}$$

Vogliamo ora costruire un termine lagrangiano senza derivate (dato che deve servire unicamente a dare massa ai mesoni pseudoscalari); il più generale risulta:

$$\mathscr{L}_M = \mu \mathrm{Tr}\left(\mathcal{M}(U + U^\dagger)\right).$$

Sviluppando in serie l'esponenziale U otteniamo:

$$\mathscr{L}_M = 2\mu \mathrm{Tr}\mathcal{M} - \frac{4\mu}{f_\pi^2}\mathrm{Tr}\left(\mathcal{M}\phi^2\right) + O(\phi^4).$$

Le masse si leggono dal termine quadratico; otteniamo allora:

$$
\begin{aligned}
m_\pi^2 &= \frac{2\mu}{f_\pi^2}(m_u + m_d) \\
m_{K^\pm}^2 &= \frac{2\mu}{f_\pi^2}(m_u + m_s) \\
m_{K^0}^2 &= \frac{2\mu}{f_\pi^2}(m_d + m_s) \\
m_\eta^2 &= \frac{2\mu}{f_\pi^2}\frac{m_u + m_d + m_s}{3}
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

da cui si ricava la *formula di Gell–Mann–Okubo* per le masse dei mesoni pseudoscalari:

$$2m_{K^\pm}^2 + 2m_{K^0}^2 = m_\pi^2 + 3m_\eta^2.$$

4.4.2 Relazione di Goldberger–Treiman

Benché si stia parlando di bassa energia, i mesoni pseudoscalari non sono le uniche particelle la cui dinamica può essere trattata con le lagrangiane fenomenologiche (basta pensare alla teoria di Fermi per il decadimento β o a quella di Yukawa per le interazioni fra nucleoni); di seguito quindi proponiamo alcuni esempi di applicazioni con l'inclusione di altre particelle.

Nel caso $N = 2$, ad esempio, la simmetria chirale $SU(2)_V$ coincide con la simmetria di isospin: possiamo quindi introdurre un doppietto fermionico $\psi(x)$ per descrivere i nucleoni. In accordo con quanto ricavato in precedenza la derivata covariante di ψ sarà:

$$D_\mu\psi(x) = \partial_\mu\psi(x) + v_\mu^a\sigma^a\psi(x)$$

e quindi possiamo costruire un termine cinetico:

$$\mathscr{L}_{\text{kin}} = i\overline{\psi}(\not{D} - M)\psi.$$

Dato la lagrangiana cinetica non contiene accoppiamenti con la parte assiale dei campi di gauge possiamo poi aggiungere un termine di interazione:

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = g_A\overline{\psi}\not{a}\gamma^5\psi.$$

Utilizzando gli sviluppi di a_μ e v_μ, equazioni (4.17), notiamo che l'accoppiamento di Yukawa (che è non derivativo nel campo dei pioni) non compare in nessuno dei due termini. È però sufficiente un cambio di variabile per mostrare che in realtà è contenuto nella lagrangiana precedente (e, per quanto dimostrato da Haag [11], cambiare parametrizzazione per i campi non modifica i risultati fisici); se ridefiniamo infatti

$$\psi \equiv \left(1 - i\frac{g_A}{f_\pi}\gamma^5\phi\right)\Psi$$

otteniamo:

$$\mathscr{L} = \overline{\Psi}(i\partial\!\!\!/ - M)\Psi + \frac{2iMg_A}{f_\pi}\Psi\gamma^5\phi\Psi + \dots$$

che contiene l'accoppiamento di Yukawa. Inoltre abbiamo anche:

$$g_{\pi NN} = \frac{2Mg_A}{f_\pi}$$

che è la *relazione di Goldberger–Treiman* [9].

4.4.3 Mesoni vettoriali

Consideriamo ora l'ottetto dei mesoni vettoriali (spin 1, parità $-$): sono il supporto di una rappresentazione di $\mathfrak{su}(3)$ (la $\mathbf{8}$) e quindi possono essere descritti dalla seguente matrice,

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega}{\sqrt{6}} & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega}{\sqrt{6}} & K^{*0} \\ K^{*-} & \overline{K}^{*0} & -\frac{2\omega}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

(dove ogni campo è sottointeso essere un quadrivettore, quindi $\rho \to \rho_\mu$). Con la derivata covariante indotta dalla connessione ν possiamo ora costruire una "field strenght":

$$\rho_{\mu\nu} = \partial_\mu\rho_\nu - \partial_\nu\rho_\mu + i[v_\mu, \rho_\nu].$$

Se ora torniamo alla lagrangiana dei mesoni pseudoscalari, possiamo introdurre nella teoria i campi associati all'ottetto dei mesoni vettoriali e modificare la parte cinetica (4.19) della lagrangiana efficace, assumendo:

$$\mathscr{L}_{kin} = -\frac{1}{4}f_\pi^2\mathrm{Tr}(a^\mu a_\mu) - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\rho^{\mu\nu}\rho_{\mu\nu}).$$

Dobbiamo poi rendere massivi i mesoni vettoriali. Questo si può fare senza rompere la simmetria chirale introducendo un termine lagrangiano (invariante) della forma:

$$\mathscr{L}_{Mass} = \frac{1}{2} m_V^2 \mathrm{Tr}(\rho_\mu \rho^\mu)$$

dove m_V rappresenta la massa "media" dei mesoni vettoriali, cioè quella che avrebbero nel limite chirale. Se si vuole tener conto anche del fatto che i quark non sono massless, e quindi introdurre le fluttuazioni legate al fatto che la simmetria $SU(3)$ globale è solo approssimata, possiamo decidere di sommare alla lagrangiana un termine:

$$\mathscr{L}_{\mathrm{CorrMass}} = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \left(\rho_\mu M_V \rho^\mu \right),$$

dove M_V è la matrice 3×3 che rende conto della differenza fra la massa media m_V dell'ottetto dei mesoni vettoriali e quella misurata sperimentalmente.

La parte quadratica della lagrangiana così ottenuta determinerà le masse e i propagatori delle particelle contenute nella teoria. La lagrangiana contiene anche alcune interazioni, altre possono essere introdotte sommando termini gauge invarianti, costruiti come descritto nella prima parte del capitolo. Ricordiamo che, per quanto segue dalla proposizione 4.1 tali interazioni devono dipendere solamente dalle derivate del campo dei mesoni pseudoscalari.

CAPITOLO 5

Processi adronici e anomalie chirali

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto le teorie effettive di campo e le lagrangiane fenomenologiche come strumento per ottenere informazioni sulle previsioni a bassa energia delle teorie di campo fondamentali, con particolare attenzione al settore adronico del Modello Standard. Ci siamo occupati fino ad ora solo della costruzione di densità lagrangiane gauge invarianti: questa limitazione ha senso (anzi, non si può prescindere da essa) fino a quando la teoria fondamentale rinormalizzata è gauge invariante. Come visto però nel capitolo 2 la simmetria di flavor del Modello Standard è anomala, e per tenere conto di questo aspetto in una teoria efficace possiamo sommare all'azione un funzionale la cui variazione restituisca l'anomalia.

Per formalizzare la questione diciamo che vogliamo che il nostro funzionale di azione effettiva soddisfi le identità di Ward anomale: non sarà più quindi gauge invariante, ma conterrà dei termini che rompono esplicitamente (a livello classico questo è l'unico modo) l'invarianza di gauge locale; sarà preservata invece l'invarianza di gauge globale. Nel capitolo 2 abbiamo costruito una soluzione, il funzionale di Wess–Zumino.

In questo capitolo vogliamo applicare la costruzione mostrata brevemente nel capitolo 3 al modello chirale $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$, approfondendo lo studio del funzionale di Wess–Zumino, mostrando forme alternative a quella calcolata nel capitolo 2 ed estendendo la costruzione al caso in cui sia presente una connessione di background[1]. Successivamente discuteremo brevemente alcuni effetti sulla dinamica dei mesoni pseudoscalari; altre applicazioni saranno mostrate nel capitolo 6.

L'ultima parte del capitolo sarà poi dedicata alle possibili conseguenze che l'anomalia chirale può avere sulle interazioni dei mesoni vettoriali. Questo è un tema ricorrente in letteratura: le prime osservazioni in questa direzione furono quelle di Kaymackalan et al. [18], e l'argomento è stato più volte ripreso [1, 7, 8, 13, 12]. A questo proposito dedicheremo parte di questo capitolo alla descrizione di una costruzione del funzionale di Wess–Zumino, alternativa a quella esposta alla fine del capitolo 2, che presenta due vantaggi: prima di tutto consente di dividere il funzionale in due parti, una non locale che contiene i campi dei soli mesoni, mentre l'altra, ottenuta come integrale di una densità lagrangiana, contiene anche i campi di gauge; inoltre può essere estesa includendo un campo vettoriale di background (1–forma a valori in $\mathfrak{su}(3)$) [25] e resa valida anche su fibrati non banali. Discuteremo in particolare la possibilità di identificare un tale campo con i mesoni vettoriali, sulla base di alcune considerazioni fenomenologiche che descriveremo più in dettaglio in seguito. I risultati a livello di ampiezze di decadimento saranno invece trattati nel prossimo capitolo.

5.1 Funzionale di WZ per teorie di gauge generiche

In questo capitolo vogliamo applicare i metodi descritti nel capitolo 3 alla costruzione e allo studio del funzionale di Wess–Zumino. Prima di considerare il caso chirale vogliamo descrivere la costruzione che utilizzeremo in seguito in un caso più semplice. Per ora non forniremo un'interpretazione fisica dei campi; per fare questo è infatti necessario che la simmetria globale sia rotta spontaneamente così da poter associare i campi dei bosoni di Goldstone ai parametri delle trasformazioni di gauge. La costruzione presentata in questo paragrafo semplificherà però la comprensione di quella utilizzata nel caso chirale, che sarà discussa poco più avanti.

Consideriamo allora una teoria di gauge con gruppo di struttura G, gruppo di Lie compatto semisemplice, supponiamo che la simmetria sia anomala e cerchiamo una soluzione delle identità di Ward. Il punto di partenza per la costruzione delle soluzioni sono ancora le descent equations (3.11). Infatti, se definiamo il seguente funzionale

$$\widetilde{\Gamma}_{WZ} = \int_D \omega^0_{2n-1}(A), \tag{5.1}$$

[1] Si veda a questo proposito la discussione nel capitolo 3.

dove $D = M \times [0,1]$, sfruttando le descent equations (3.11) possiamo ricavare immediatamente

$$s\widetilde{\Gamma}_{WZ} = \int_D \underline{s}\omega^0_{2n-1} = \int_M \omega^1_{2n-2}(A,v)$$

che, per la (3.15), coincide con l'anomalia chirale. Dato che il funzionale si esprime come integrale su una varietà $(2n-1)$–dimensionale (nello spazio tempo quadri–dimensionale $n=3$) il funzionale (5.1) è non–locale. Notiamo inoltre che, dato che A ristretto a $M \times \{0\}$ è identicamente nullo[2] possiamo identificare D con il disco $(2n-1)$–dimensionale.

Seguendo la costruzione di Mañes mostriamo ora come sia possibile riscrivere $\widetilde{\Gamma}_{WZ}$ come somma di due funzionali di cui il secondo dato dall'integrale di una densità lagrangiana e in modo tale che i campi di gauge compaiano solo in quest'ultimo: se indichiamo con T l'azione di G sui campi di gauge, avremo:

$$T(g)\omega^0_{2n-1}(F) \equiv \omega^0_{2n-1}(A_g) = \omega^0_{2n-1}(A) + \omega^0_{2n-1}(g^{-1}dg) + d\alpha(A,g)$$

dove α è una $(2n-2)$–forma. Le trasformazioni di gauge ora agiranno nel seguente modo: dato $h \in \mathcal{G}$,

$$A \mapsto A_h$$
$$g \mapsto gh^{-1}$$

Allora avremo che il funzionale definito da

$$\widetilde{\Gamma}_{WZ}[A,g] = -\int_D \omega^0_{2n-1} - \int_M \alpha(A,g)$$

soddisfa le identità di Ward anomale, e quindi abbiamo ottenuto il funzionale di Wess–Zumino nella forma che cercavamo.

5.1.1 Funzionale di WZ con connessioni di background

Come nel capitolo 3 supponiamo ora che il fibrato $P(M,G)$ sia non banale e che per definire globalmente la 1–forma di connessione A sia necessario introdurre una 1–forma A_0 a valori in $\mathfrak{g}$. Supponiamo inoltre che la teoria sia anomala e l'anomalia sia data da $\mathscr{A} = \int G(v,A,A_0)$; vogliamo costruire un funzionale di azione effettiva che soddisfi $s\Gamma = \mathscr{A}$. Come nel paragrafo precedente definiamo:

$$\widetilde{\Gamma}_{WZ}[v,A,A_0] = \int_D \omega^0_{2n-1}(A_\tau, A_0) - \omega^0_{2n-1}(A_{\tau,g_\tau}, A_0) \tag{5.2}$$

[2]Segue dalla definizione dell'estensione di A da M a D introdotta nel capitolo 3.

dove A_τ e g_τ sono definiti come nella sezione 3.3, $D = M \times [0,1]$ e τ è la coordinata relativa al fattore $[0,1]$ (un appunto sulla notazione: per evitare di appesantire troppo la trattazione d'ora in poi indicheremo con d sia il differenziale esterno su D che quello su M). Allora, sempre grazie alle descent equations (3.11), avremo:

$$
\begin{aligned}
s\widetilde{\Gamma}_{WZ}[\underline{v}, A, A_0] &= \int_D \underline{s}\left(\omega^0_{2n-1}(A_\tau, A_0) - \omega^0_{2n-1}(A_{\tau,g_\tau}, A_0)\right) \\
&= \int_M \omega^1_{2n-2}(v, A, A_0) = \mathscr{A},
\end{aligned}
$$

dove per giustificare la seconda uguaglianza è sufficiente notare che

$$
\underline{s}\omega^0_{2n-1}(A_{\tau,g_\tau}, A_0) = 0
$$

(si può ricavare usando la forma esplicita per ω^0_{2n-1} data dalla (3.16)).

Come anticipato ci proponiamo ora di riscrivere il funzionale (5.2) come somma di due termini in modo da rendere locale la dipendenza da A. Per fare questo notiamo che ω^0_{2n-1} soddisfa le seguenti relazioni (che si possono ricavare direttamente dalla forma esplicita, equazione (3.16)):

- invarianza di gauge: $\omega^0_{2n-1}(A, A_0) = \omega^0_{2n-1}(A_g, A_{0g})$,
- antisimmetria: $\omega^0_{2n-1}(A_1, A_2) = -\omega^0_{2n-1}(A_2, A_1)$;

dove, specifichiamo, $A_{0,g} \equiv \mathrm{Ad}(g^{-1})A_0 + g^{-1}dg$. Allora, sommando zero alla (5.2) e usando invarianza di gauge e antisimmetria sul primo termine, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}_{WZ} = -\int_D & \omega^0_{2n-1}(A_{0,g_\tau}, A_{\tau,g_\tau}) + \omega^0_{2n-1}(A_{0,g_\tau}, A_0) \\
&+ \omega^0_{2n-1}(A_{\tau,g_\tau}, A_0) + \omega^0_{2n-1}(A_0, A_{0,g_\tau})
\end{aligned}
$$

Usando ora la triangle formula (3.17) abbiamo:

$$
\widetilde{\Gamma}_{WZ} = \widetilde{\Gamma}_m + \widetilde{\Gamma}_A \tag{5.3}
$$

dove

$$
\widetilde{\Gamma}_m = -\int_D \omega^0_{2n-1}(A_{0,g_\tau}, A_0) \quad \text{e} \quad \widetilde{\Gamma}_A = \int_M \zeta(A_g, A_{0,g}, A_0),
$$

che è esattamente quello che volevamo: abbiamo scritto il funzionale $\widetilde{\Gamma}_{WZ}$ come somma di due parti, la prima non–locale che dipende da g e dalla connessione di background, e la seconda, locale, che contiene la dipendenza dal campo di gauge A.

5.2 Funzionale di WZ per $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$

Nel capitolo 2 abbiamo costruito una forma valida del funzionale di Wess–Zumino per $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$ come soluzione delle identità di Ward anomale. Il risultato ottenuto (2.21) dipende da $g : X \to G/H$ (dove $G = SU(3)_R \otimes SU(3)_L$ e $H = SU(3)_V$) e dai campi di gauge e si esprime come integrale sul disco $2n-1$ dimensionale (con $d = 2n-2$ la dimensione dello spazio–tempo; quindi $n = 3$ per una teoria quadridimensionale). Vogliamo ora mostrare come lo stesso risultato si può ottenere utilizzando i metodi "geometrici" sviluppati nelle sezioni precedenti e nel capitolo 3: vogliamo cioè trasformare $\widetilde{\Gamma}_{WZ}$, definito dalla (5.1), in un funzionale che dipenda dai campi dei bosoni di Goldstone associati alla rottura spontanea di simmetria $SU(3)_R \otimes SU(3)_L \to SU(3)_V$ e che dia l'anomalia nella forma vettoriale–assiale (2.13); la differenza con quanto ottenuto nel capitolo 2 sarà la possibilità di rendere locale la parte del funzionale che dipende dai campi di gauge e, soprattutto, di scrivere il funzionale di Wess–Zumino in presenza di una connessione di background. Per semplificare la notazione in seguito considereremo sottointesa la dipendenza da τ delle forme di connessione e del campo g_τ, che verrà esplicitata solamente nei casi in cui potrebbe essere possibile fare confusione; allo stesso modo non distingueremo più s, d da $\underline{s}$ e $\mathbf{d}$.

Consideriamo i campi di gauge L e R relativi rispettivamente ad $SU(3)_L$ ed $SU(3)_R$ e supponiamo per ora di introdurre campi g_L e g_R a valori nei due rispettivi gruppi di Lie; siano inoltre $v_L = g_L^{-1} s g_L$ e $v_R = g_R^{-1} s g_R$. Allora, mettendo insieme la (2.9) e le (3.14) (3.15), otteniamo che la variazione di gauge del seguente funzionale,

$$\widetilde{\Gamma}_{WZ} = \int_{D^{2n-1}} \omega^0_{2n-1}(R) - \omega^0_{2n-1}(L) \equiv \int_{D^{2n-1}} \omega^0_{2n-1}(R, L),$$

restituisce esattamente la forma left–right simmetrica dell'anomalia chirale, dove come polinomio ad–invariante abbiamo preso la traccia (rispettivamente, la traccia sugli indici di $\mathfrak{su}(3)_R$ e quella sugli indici di $\mathfrak{su}(3)_L$), che è esattamente la scelta che permette di ottenere l'anomalia nella forma (2.9).

Vogliamo ora passare alla forma vettoriale–assiale dell'anomalia. Prima di iniziare precisiamo che in seguito indicheremo con $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ le algebre di Lie rispettivamente di G e H; dato che G/H è uno spazio omogeneo simmetrico abbiamo:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{h}.$$

Cominciamo con l'osservare che l'anomalia, in qualsiasi forma essa sia espressa, proviene via descent equations da una soluzione di

$$\Omega(R,L) \equiv \Omega(R) - \Omega(L) = d\omega(R,L)$$

dove $\Omega = P(F^n)$. Chiaramente $\omega^0_{2n-1}(R) - \omega^0_{2n-1}(L)$ è una soluzione di questa equazione. Inoltre un'altra soluzione potrà differire da essa solo per un differenziale totale; cerchiamo quindi

$$\widetilde{\omega}^0_{2n-1}(R,L) = \omega^0_{2n-1}(R,L) + dS_{2n-2}(R,L),$$

che sia anche invariante sotto l'azione di H:

$$T(g,g)\widetilde{\omega}^0_{2n-1}(R,L) = \widetilde{\omega}^0_{2n-1}(R,L).$$

Una tale soluzione esiste [24] e S_{2n-2} non è altro che il controtermine di Bardeen (2.12):

$$\Gamma_B[R,L] \equiv \int_{S^{2n-2}} S_{2n-2}(R,L) \tag{5.4}$$

Possiamo ora definire il funzionale di Wess–Zumino come:

$$\Gamma_{WZ}[g_R, g_L, R, L] = \int_D \omega^0_{2n-1}(R,L) - T(g_R, g_L)\widetilde{\omega}^0_{2n-1}(R,L) \tag{5.5}$$

Con Γ_{WZ} così definito abbiamo l'anomalia nella forma vettoriale assiale (a meno di una costante moltiplicativa $= N_c \cdot k_n$), e la dipendenza da $v_{\mathfrak{h}}$ è stata rimossa [24]. Quello che rimane da fare per poter dare senso fisico al campo g da cui dipende il nuovo funzionale è ricondurci ad un funzionale che dipenda solo da U, con U una mappa a valori in G/H: in questo caso U può essere identificato con il campo dei bosoni di Goldstone associati alla rottura di simmetria $G \to H$. Non è difficile ottenere questo: iniziamo col notare che, grazie all'invarianza sotto trasformazioni di gauge relative ad H,

$$\begin{aligned} T(g_R, g_L)\widetilde{\omega}^0_{2n-1}(R,L) &= T(g_R, g_R)T(e, g_L g_R^{-1})\widetilde{\omega}^0_{2n-1}(R,L) \\ &= T(e,U)\widetilde{\omega}^0_{2n-1}(R,L) \end{aligned}$$

dove abbiamo posto $U = g_L g_R^{-1}$. Inoltre:

$$\begin{aligned} T(e,U)\widetilde{\omega}^0_{2n-1}(R,L) =& \omega^0_{2n-1}(R,L) - \omega^0_{2n-1}(U^{-1}dU) - d\alpha(L,U) \\ &+ dS_{2n-2}(R, U^{-1}LU + U^{-1}dU), \end{aligned}$$

quindi il funzionale di Wess–Zumino diventa:

$$\begin{aligned}\Gamma_{WZ}[g_R, g_L, R, L] = &\int_D \omega^0_{2n-1}(U^{-1}dU) + \int_M \alpha(L, U) \\ &- \int_M S_{2n-2}(R, U^{-1}LU + U^{-1}dU).\end{aligned} \tag{5.6}$$

Dal funzionale così ottenuto si possono leggere vertici efficaci per le interazioni fra i mesoni pseudoscalari; in particolare il funzionale di Wess–Zumino contiene le interazioni responsabili del decadimento $\pi^0 \to 2\gamma$, come sarà mostrato nel capitolo 6. L'importanza della costruzione è legata al fatto che il funzionale è definito a meno di un'unica costante moltiplicativa: quindi le costanti di accoppiamento dei vertici contenuti in Γ_{WZ} non sono arbitrarie, ma fissate dall'anomalia chirale. Il funzionale di Wess–Zumino risulta quindi un buon metodo per testare effetti legati ad aspetti non perturbativi del Modello Standard sulla dinamica a bassa energia degli adroni.

Osservazione 5.1. Per semplicità di notazione abbiamo utilizzato il simbolo $\omega^0_{2n-1}(R, L)$ per indicare la dipendenza dalle due componenti del campo di gauge. Ma, anche se la scrittura è la stessa, il significato è molto differente da quello di $\omega^0_{2n-1}(A_1, A_2)$ usato alla fine del capitolo 3 (ad esempio nell'equazione (3.16)). Nel prossimo paragrafo, dato che sarà importante distinguere le due cose, utilizzeremo una notazione un po' meno compatta ma più chiara.

5.2.1 Funzionale di WZ per $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$ con connessioni di background

In modo analogo a quanto fatto poco sopra possiamo definire il funzionale di Wess–Zumino per fibrati non banali in presenza di connessioni di background. Per fare questo dobbiamo prima di tutto rimuovere dall'anomalia la dipendenza da A_0. A tale fine notiamo che, come descritto nel capitolo 4, a causa della rottura della simmetria chirale al sottogruppo vettoriale la teoria è descritta in termini di fibrati associati al fibrato H–principale Q; inoltre per la scelta del polinomio P utilizzato per la costruzione dell'anomalia ($P = \mathrm{Tr}$) il contributo relativo ad $\mathfrak{h}$ è identicamente nullo (la parte left cancella quella right): possiamo quindi scegliere A_0 a valori in $\mathfrak{h}$ e cercare di rendere nullo il contributo di A_0 all'anomalia.

Una considerazione importante prima di iniziare: non è necessario assumere che A_0 sia BRS–invariante; è sufficiente che A_0 sia covariante sotto l'azione del sottogruppo esatto H, e che l'azione di G su A_0 sia ottenuta esattamente come quella di G sui campi di materia descritta nel capitolo 4 (e quindi determinata dalla rottura spontanea di simmetria)[3]. La dimostrazione di questo fatto sarà data tra poco, prima è opportuno precisare alcune cose: la costruzione precedente è applicabile separatamente ai due gruppi, left e right, e quindi dobbiamo ottenere da A_0 due campi L_0 e R_0, rispettivamente left e right covarianti. Per fare questo ci rifacciamo alle costruzioni del capitolo 4: sia $\xi : M \to \mathfrak{k}$, $\xi = \xi^a T_A^a$, allora in generale per $g \in \mathcal{G}$,

$$ge^{i\xi} = e^{i\xi'} e^{iu'}$$

con $u' = u'_a T_V^a$. Se allora definiamo

$$R_0 \equiv e^{-i\xi} A_0 e^{i\xi} \qquad L_0 \equiv e^{i\xi} A_0 e^{-i\xi}$$

avremo che, per una trasformazione di gauge $g = (g_R, g_L)$,

$$R'_0 = g_R^{-1} R_0 g_R \qquad L'_0 = g_L^{-1} L_0 g_L$$

e quindi R_0 e L_0 così definiti sono i campi che utilizzeremo per costruire il funzionale di Wess–Zumino. La differenza rispetto alla costruzione di Mañes et al. [25] è che i due campi non sono più invarianti, quindi a priori si potrebbero ottenere risultati differenti; per vedere che questo non accade riprendiamo la costruzione dall'inizio: il punto di partenza è sempre un polinomio ad–invariante P, che, inoltre, scegliamo in modo che sia identicamente nullo su $\mathfrak{h}$ (nel caso chirale P è dato dalla traccia del prodotto degli argomenti). Prima di proseguire introduciamo un po' di notazione: i campi di gauge hanno due componenti, left e right, e indicheremo in seguito:

$$\hat{A} = (R, L), \qquad \hat{g} = (g_R, g_L), \qquad \hat{v} = (v_R, v_L)$$

e, di conseguenza, definendo $V \equiv \frac{1}{2}(R + L)$, $A \equiv \frac{1}{2}(R - L)$,

$$\hat{A}_{\mathfrak{h}} = (V, V) \qquad \hat{A}_{\mathfrak{k}} = (A, -A).$$

Inoltre per il polinomio P e per la forma ω^0_{2n-1} utilizziamo, in accordo con la forma left–right simmetrica dell'anomalia chirale, la seguente notazione:

$$P(F^n(\hat{A})) \equiv P(F^n(R)) - P(F^n(L))$$

[3]La rappresentazione sotto la quale deve trasformare A_0 è chiaramente la rappresentazione aggiunta, in quanto deve essere coerente con le trasformazioni dei campi di gauge.

$$\omega^0_{2n-1}(\hat{A}, \hat{A}_0) = \omega^0_{2n-1}(R, R_0) - \omega^0_{2n-1}(L, L_0).$$

Come in caso di assenza di background, cerchiamo una soluzione di

$$P(F^n(\hat{A})) - P(F^n(\hat{A}_0)) = d\omega(\hat{A}, \hat{A}_0).$$

Per ottenere le descent equations (3.11) dobbiamo effettuare una trasformazione di gauge $g(x, \lambda)$; a differenza del caso studiato precedentemente ora però dobbiamo trasformare anche R_0 e L_0, e questo potrebbe rompere l'invarianza di gauge della somma dei quattro polinomi. In realtà la presenza della differenza fra la parte right e la parte left evita questo problema: infatti trasformando di gauge le forme di curvatura dei due campi otteniamo

$$F(R'_0) = e^{-i\xi'} F(A'_0) e^{i\xi'} - \left(de^{-i\xi'}\right) A'_0 e^{i\xi'} + e^{-i\xi'} A'_0 \left(de^{i\xi'}\right)$$

$$F(L'_0) = e^{i\xi'} F(A'_0) e^{-i\xi'} + \left(de^{i\xi'}\right) A'_0 e^{-i\xi'} - e^{i\xi'} A'_0 \left(de^{-i\xi'}\right)$$

dove $A'_0 = e^{-iu'} A_0 e^{iu'}$. Utilizzando la BH–formula[4] possiamo ora ricavare le seguenti relazioni (si ottengono scrivendo le derivate come rapporti incrementali e poi passando al limite):

$$e^{-i\xi'} de^{i\xi'} = id\xi' - \frac{i}{2}\xi'^a d\xi'^b [T^a_A, T^b_A] = id\xi' - \frac{i}{2}\xi'^a d\xi'^b f_{abc} T^c_V \equiv id\xi' - i\eta$$

$$e^{i\xi'} de^{-i\xi'} = -id\xi' - \frac{i}{2}\xi'^a d\xi'^b [T^a_A, T^b_A] = -id\xi' - \frac{i}{2}\xi'^a d\xi'^b f_{abc} T^c_V \equiv -id\xi' - i\eta$$

quindi otteniamo:

$$F(R'_0) = e^{-i\xi'} F(A'_0) e^{i\xi'} - e^{-i\xi'} \left(-id\xi' - i\eta\right) A'_0 e^{i\xi'} + e^{-i\xi'} A'_0 e^{i\xi'} \left(id\xi' - i\eta\right)$$

$$F(L'_0) = e^{i\xi'} F(A'_0) e^{-i\xi'} - e^{i\xi'} \left(id\xi' - i\eta\right) A'_0 e^{-i\xi'} + e^{i\xi'} A'_0 e^{-i\xi'} \left(-id\xi' - i\eta\right).$$

Sfruttando ora il fatto che P è identicamente nullo sulla sottoalgebra $\mathfrak{h}$ (η è a valori in $\mathfrak{h}$ per definizione) e che è ad–invariante, separando le parti left e right si ricava l'invarianza di gauge; quindi le descent equations sono ben definite anche in questo caso.

Torniamo alla costruzione del funzionale di Wess–Zumino. Per rimuovere l'ano-

[4] $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$

malia dalla parte vettoriale definiamo l'analogo del controtermine di Bardeen (5.4):

$$\begin{aligned}\Gamma_B[\hat{A}, \hat{A}_0] &= -\int_D \omega^0_{2n-1}(\hat{A}, \hat{A}_0) + \omega^0_{2n-1}(\hat{A}_0, \hat{A}_{\mathfrak{h}}) + \omega^0_{2n-1}(\hat{A}_{\mathfrak{h}}, \hat{A}) \\ &= \int_M \zeta(\hat{A}, \hat{A}_{\mathfrak{h}}, \hat{A}_0).\end{aligned} \tag{5.7}$$

Definiamo quindi anche in questo caso il funzionale di Wess–Zumino come:

$$\Gamma_{WZ}[g, A, A_0] = \widetilde{\Gamma}_m + \widetilde{\Gamma}_A + \Gamma_B \tag{5.8}$$

dove g è il campo che ora rappresenta i bosoni di Goldstone. L'unico punto delicato nella costruzione, oltre a quello già controllato poco sopra, è stabilire se sia vero che $s\omega^0_{2n-1}(\hat{A}_g, A_0) = 0$, anche se ora $\hat{A}_0$ non è più invariante, ma covariante. Per fare questo possiamo "dividere" l'operatore BRS in due parti: $s \equiv s^A + s^0$, dove s^A agisce sui campi di gauge ed s^0 sul campo di background. Allora si ottiene $s^A\omega^0_{2n-1}(\hat{A}_g, \hat{A}_0) = 0$ (è identico al caso considerato in [25]) e, utilizzando le (3.4),

$$s\int_D \omega^0_{2n-1}(\hat{A}_g, \hat{A}_0) = \int_D d\int_0^1 dt\ SP\left(R_g - R_0, tldR_0, F_t^{n-2}\right) - (\text{left}),$$

dove F_t è la forma di curvatura associata alla famiglia di connessioni $t\hat{A}_0 + (1-t)\hat{A}_g$ e l è la derivazione omotopica introdotta in precedenza. E, dato che $R_0 = e^{-i\xi}A_0e^{i\xi}$, con A_0 covariante vettoriale, $s^0\omega^0_{2n-1}(R_g, R_0) = 0$; e analogamente si vede che si annulla la parte left. Quindi $s\omega^0_{2n-1}(\hat{A}_g, \hat{A}_0) = 0$. Rimane ora da mostrare che Γ_{WZ} restituisce l'anomalia nella forma vettoriale–assiale: usando la triangle formula (3.17), il risultato precedente e il fatto che P si annulla quando gli argomenti sono a valori in $\mathfrak{su}(3)_V$, otteniamo

$$s\Gamma_{WZ} = \int_D s\omega^0_{2n-1}(\hat{A}, \hat{A}_{\mathfrak{h}}).$$

La variazione si calcola esattamente come fatto in [25] e si ottiene

$$s\Gamma_{WZ} = -\int_D d\omega^1_{2n-1}(v, A_{\mathfrak{h}}, A_{\mathfrak{k}}) = -\int_M \omega^1_{2n-1}(v, A_{\mathfrak{h}}, A_{\mathfrak{k}})$$

dove $\omega^1_{2n-1}(v, A_{\mathfrak{h}}, A_{\mathfrak{k}})$ è dato da:

$$\begin{aligned}\omega^1_{2n-1}(v, A_{\mathfrak{h}}, A_{\mathfrak{k}}) &= n\int_0^1 dt\ P(v_{\mathfrak{k}}, F^{n-1}(A_{\mathfrak{h}} + tA_{\mathfrak{k}})) \\ &\quad + n(n-1)\int_0^1 P(A_{\mathfrak{k}}, t^2[A_{\mathfrak{k}}, v_{\mathfrak{k}}] - t[A_{\mathfrak{k}}, v_{\mathfrak{k}}]_{\mathfrak{k}} - [A_{\mathfrak{k}}, v_{\mathfrak{k}}]_{\mathfrak{h}}, F^{n-2}(A_{\mathfrak{h}} + tA_{\mathfrak{k}})).\end{aligned}$$

Come si può vedere dall'equazione precedente l'anomalia non dipende più da $v_{\mathfrak{h}}$, e quindi Γ_{WZ} è invariante sotto $SU(3)_V$.

Concludiamo questo paragrafo con una formula valida per Γ_B, che permette di trattare la dipendenza di Γ_{WZ} da A_0 e sarà utile in seguito:

$$\Gamma_B(A, A_0^2) - \Gamma_B(A, A_0^1) = -\int_M \zeta(A, A_0^2, A_0^1) \tag{5.9}$$

che si ottiene come diretta conseguenza della triangle formula (3.17).

5.2.2 Termine di Wess–Zumino–Witten

La forma (5.5) del funzionale di Wess–Zumino (in assenza di connessioni di background) permette di isolare subito il cosiddetto *termine di Wess–Zumino–Witten* [33], che è quanto rimane del funzionale se si mettono a zero i campi di gauge nonché l'unico termine che contiene vertici "a 5 π". Infatti in questo caso Γ_{WZ} si riduce a

$$\Gamma_{WZW} = -\widetilde{\Gamma}_m(g^{-1}dg, A_0 = 0) = \int_D \omega_5^0(g^{-1}dg, 0)$$

che si può facilmente calcolare ottenendo:

$$\Gamma_{WZW}[g] = -\frac{1}{10}\int_D \mathrm{Tr}(g^{-1}dg)^5$$

dove per g possiamo utilizzare la notazione con matrici 3×3 opportunamente estesa a 5 dimensioni, prendendo quindi ad esempio $g = e^{i\varphi(\tau)\pi^a(x)T^a}$ con $\varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1$.

5.2.3 Contributi alle correnti di flavor

In generale l'azione fenomenologica si scriverà (vedi capitolo 4) come

$$S = \int \mathscr{L}_{inv} + \int \mathscr{L}_{non-inv} + (N_c \cdot k_n)\Gamma_{WZ}$$

(per ora consideriamo $A_0 = 0$) con $k_3 = \frac{1}{24\pi^2}$. L'introduzione del funzionale di Wess–Zumino nell'azione fenomenologica modifica la forma delle correnti di flavor. Per determinare tali correnti possiamo sviluppare Γ_{WZ} al primo ordine nei campi di gauge; si ottiene:

$$(N_c \cdot k_n)\Gamma^{(1)}_{WZ}[g, L_\mu, R_\mu] = \frac{N_c}{48\pi^2}\int d^4x\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\Big[R_\mu \partial_\nu g g^{-1}\partial_\rho g g^{-1}\partial_\sigma g g^{-1} + L_\mu g^{-1}\partial_\nu g g^{-1}\partial_\rho g g^{-1}\partial_\sigma g\Big]. \tag{5.10}$$

Allora i contributi anomali alle correnti risultano

$$J^a_{\mu_L} = -\frac{N_c}{48\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\Big[T^a g^{-1}\partial^\nu g g^{-1}\partial^\rho g g^{-1}\partial^\sigma g\Big], \tag{5.11}$$

$$J^a_{\mu_R} = -\frac{N_c}{48\pi^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\Big[T^a \partial^\nu g g^{-1}\partial^\rho g g^{-1}\partial^\sigma g g^{-1}\Big]. \tag{5.12}$$

5.3 Mesoni vettoriali

Vogliamo ora iniziare a parlare di mesoni vettoriali. Precisiamo prima di tutto che ci interesseranno solamente i mesoni dell'ottetto $(\rho^0, \rho^\pm, \omega, K^{*\pm}, \overline{K}^{*0}, K^{*0})$ (più il singoletto ϕ, che va considerato dato il mixing non banale con l'ω [21]). Come accennato nell'introduzione al capitolo, in letteratura si trovano diversi tentativi di considerare alcuni decadimenti dei mesoni vettoriali come "processi anomali", nel senso che l'ampiezza viene in qualche modo legata all'anomalia chirale (la stessa idea utilizzata per il decadimento del π^0, vedi capitolo 6). Uno dei mattoni fondamentali di tutte queste costruzioni è il modo in cui si introducono i campi dei mesoni vettoriali nella lagrangiana efficace; vi sono infatti diverse possibilità[5]:

•**Campi di materia.** Si considerano i mesoni vettoriali come campi di materia a valori nell'algebra $\mathfrak{su}(3)$. Nel framework utilizzato nel capitolo 4 questo corrisponde a considerare i mesoni vettoriali come sezioni del fibrato associato $E = (Q \times \mathfrak{su}(3))/H$ dove l'azione di $H = SU(3)_V$ sul secondo fattore è l'azione aggiunta. È il metodo utilizzato ad esempio in [7, 21, 22], ed è coerente con la costruzione delle lagrangiane fenomenologiche utilizzata da Callan, Coleman, Wess e Zumino (CCWZ) [5, 4]. A priori questo metodo non implica nessun legame fra mesoni vettoriali e anomalia chirale; come vedremo successivamente la situazione può cambiare se si introducono vincoli sulla dinamica e sulle equazioni del moto.

[5] Ricordiamo che l'ottetto dei mesoni vettoriali trasforma secondo la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{su}(3)$.

•**Campi di gauge.** Si considerano i mesoni vettoriali come campi di gauge legati al sottogruppo $SU(3)_V$ del gruppo di flavor. È il metodo utilizzato da Kaymackalan et al. in [18] e comporta chiaramente l'impossibilità di introdurre i campi di gauge del Modello Standard, a meno di introdurre un mixing (ad esempio fra il campo elettromagnetico e i mesoni vettoriali). Sotto queste ipotesi, in ogni caso, i mesoni vettoriali sono identificati con i campi di gauge presenti nel funzionale di Wess–Zumino, e se ne derivano in questo modo interazioni "anomale".

•**Ipotesi Hidden Local Symmetry.** È il metodo introdotto da Fujiwara, Kugo, Tearo, Uehara e Yamawaki [1, 8, 12] e consiste nel fissare l'arbitrarietà $SU(3)_V$ nella scelta della parametrizzazione del campo dei bosoni di Goldstone (vedi capitolo 4) e, per non perdere l'invarianza locale della teoria rispetto ad $SU(3)_V$, introdurre i mesoni vettoriali come bosoni di gauge di un ulteriore $SU(3)_V$, che non viene considerato come sottogruppo del gruppo di flavor. Anche in questo caso però l'introduzione dei campi di gauge del Modello Standard comporta la comparsa di un mixing fra il campo elettromagnetico e il campo dei mesoni vettoriali.

•**Campi di background nella lagrangiana fondamentale.** I mesoni vettoriali sono introdotti direttamente nella lagrangiana fondamentale del Modello Standard come campi di background [13]:

$$\mathscr{L} = \overline{\psi}(\not{D} + \not{V})\psi$$

(dove con V abbiamo indicato il campo dei mesoni). In questo caso già a livello fondamentale l'anomalia calcolata nel settore adronico contiene i campi dei mesoni; perché la teoria sia rinormalizzabile è quindi necessario cancellare tali contributi (che non potrebbero essere cancellati dall'anomalia relativa al settore leptonico): è possibile farlo attraverso l'introduzione di un controtermine locale [13]. In questo caso le interazioni anomale dei mesoni provengono sia dal funzionale di Wess–Zumino che dal nuovo controtermine. Il problema di questo metodo può essere l'identificazione dei campi di background con i mesoni vettoriali: dato che sono introdotti a livello fondamentale non vi è nessuna limitazione sulle masse e sulle energie delle particelle coinvolte, e quindi a priori non è evidente che tali campi non contengano contributi da altre particelle o risonanze che non siano i mesoni vettoriali dell'ottetto.

•**Altri metodi.** In letteratura sono stati utilizzati altri metodi per la descrizione dei mesoni vettoriali. In generale è stato mostrato che sono equivalenti ad uno di quelli sopra citati. Per completezza citiamo il più usato: i mesoni vettoriali vengono descritti via tensori antisimmetrici di rango 2; si può vedere facilmente [7] che è equivalente a considerare i mesoni vettoriali come campi di materia a valori in $\mathfrak{su}(3)$.

La scelta che faremo, e che utilizzeremo nel seguito di questo lavoro, è quella di considerare i mesoni vettoriali come campi di materia; tale decisione è dettata da due motivazioni: per prima cosa vogliamo mantenere pieno accordo con il metodo CCWZ, illustrato nel capitolo 4; in secondo luogo è la scelta più conservativa: a priori non lega in alcun modo fra loro l'anomalia chirale e i mesoni vettoriali. Come vedremo questo non esclude un collegamento fra le due cose, ma sono necessarie alune ipotesi supplementari.

5.3.1 Vector Meson Dominance

Il vincolo supplementare che richiederemo in seguito è la cosiddetta *Vector Meson Dominance*, cioè ipotizzeremo che la corrente elettromagnetica sia dominata, a bassa energia, dai mesoni vettoriali. Tale assunzione è motivata da diversi lavori[6] sullo studio dei processi adronici attraverso le teorie efficaci ed è, spesso implicitamente, adottata nei lavori citati nel paragrafo precedente. Vi sono varie formulazioni della VMD, alcune delle quali portano ad un mixing fra campo elettromagnetico e campo dei mesoni (e sono, in fondo, alla base della scelta di descrivere i mesoni non come semplici campi di materia ma come campi di gauge o di background), altre meno vincolanti. Quella che adotteremo, e che sarà descritta in breve nel seguito di questo paragrafo, è la VMD così come introdotta da Kroll, Lee e Zumino [21, 22] e si basa sulla richiesta che, via equazioni del moto, la corrente elettromagnetica sia proporzionale ai campi dei mesoni vettoriali. È importante sottolineare che questa è una condizione sulla dinamica, e non modifica in alcun modo le definizioni dei campi della teoria e la loro associazione con le particelle rilevate sperimentalmente.

In questa breve esposizione per semplicità consideriamo il campo elettromagnetico come unico campo di gauge e il mesone ρ come unico mesone vettoriale. Per iniziare assumiamo che la teoria sia descritta da una lagrangiana della forma

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\text{free}} + \mathscr{L}_{\text{strong}} + \mathscr{L}_{\gamma}$$

dove $\mathscr{L}_{\text{strong}}$ contiene i vertici dovuti alle interazioni forti, $\mathscr{L}_{\gamma}$ quelli dovuti alle

[6] Si possono vedere gli articoli citati in [21] per una bibliografia significativa sull'argomento.

interazioni elettromagnetiche e $\mathscr{L}_{\text{free}}$ è la lagrangiana libera, che assumiamo della forma:

$$\mathscr{L}_{\text{free}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_\mu\rho^\mu, \qquad G_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\rho_\nu - \partial_\nu\rho_\mu,$$

con $F_{\mu\nu}$ la field strenght del campo elettromagnetico. Tale assunzione è abbastanza generale, e non è legata all'ipotesi di VMD.

Per introdurre quest'ultima facciamo invece una richiesta più forte: a meno di una costante di accoppiamento, le interazioni del ρ e dei fotoni con gli altri campi della teoria sono le stesse. Sotto queste ipotesi, allora, potremo scrivere $\mathscr{L}_\gamma$ nella forma:

$$\mathscr{L}_\gamma = e\frac{\lambda g_\rho}{m_\rho^2}\left(J_\mu^\rho A^\mu + \frac{1}{2g_\rho}G_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) + O(e^2)$$

dove J_μ^ρ è la corrente adronica a cui accoppia il ρ, cioè quella che, nell'equazione del moto per il ρ, ha origine da $\mathscr{L}_{\text{strong}}$. Quindi avremo le seguenti equazioni di Eulero–Lagrange

$$\begin{aligned}
&\partial^\nu G_{\mu\nu} - m^2\rho_\mu = g_\rho J_\mu^\rho + O(e) \\
&\partial^\nu F_{\mu\nu} \equiv eJ_\mu^{em} = -e\frac{\lambda g_\rho}{m_\rho^2}\left(J_\mu^\rho - \frac{1}{g_\rho}\partial^\nu G_{\mu\nu}\right) + O(e^2)
\end{aligned}$$

Mettendo assieme le due equazioni abbiamo esattamente la VMD:

$$J_\mu^{em} = -\lambda\rho_\mu + O(e)$$

che si intende qui valere al primo ordine nella carica elettrica e, soprattutto, solo come equazione dinamica, legata alla particolare forma scelta per la lagrangiana.

5.3.2 VMD e formalismo CCWZ

Dopo aver introdotto l'idea della Vector Meson Dominance, vogliamo ora rendere più effettiva la trattazione implementando quanto discusso nel paragrafo precedente col formalismo CCWZ (Callan, Coleman, Wess e Zumino [4]), cioè quello discusso nel capitolo 4. Nel seguito indicheremo con ρ_μ il campo che descrive l'ottetto dei mesoni vettoriali, con la normalizzazione specificata nella (4.22). Come visto in precedenza la parte gauge invariante della lagrangiana di materia si potrà scrivere nella forma

$$\mathscr{L}_M = \mathscr{L}_M(\pi, D_\mu\pi, \rho_\mu, D_\mu\rho_\nu)$$

dove $D_\mu \pi \equiv p_\mu$ (che trasforma in modo covariante sotto l'azione del gruppo) e

$$D_\mu \rho_\nu = \partial_\mu \rho_\nu + \mathrm{ad}(v_\mu)\rho_\nu$$

Come parte "cinetica" della lagrangiana utilizziamo:

$$\mathscr{L}_{\mathrm{kin}} = -\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) - \frac{1}{2}f_\pi^2 \mathrm{Tr}\,(a_\mu a^\mu) + \frac{1}{2}m_\rho^2 \mathrm{Tr}(\rho_\mu \rho^\mu) \tag{5.13}$$

dove $F_{\mu\nu}$ è la forma di curvatura associata alla forma di connessione v_μ e $G_{\mu\nu}$ è definito da:

$$G_{\mu\nu} = D_\mu \rho_\nu - D_\nu \rho_\mu + \frac{1}{g_\rho}[\rho_\mu, \rho_\nu].$$

Dobbiamo ora costruire la lagrangiana di interazione; prima di tutto specifichiamo che, in accordo con l'ipotesi di VMD, deve contenere un vertice del tipo $F_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$. Deve poi rispettare la costruzione descritta nel capitolo 4: in particolare, come segue dalla proposizione 4.1, gli accoppiamenti dei pioni ai campi di materia devono essere derivativi. Inoltre dobbiamo tener conto che, a meno di una costante globale, sia v_μ che ρ_μ devono accoppiare alla stessa corrente. Queste sono le regole generali per costruire la lagrangiana di interazione: sono ammissibili tutti i termini che soddisfano queste condizioni. Potremmo di seguito elencarli tutti, ma non è di nostro diretto interesse: quello che è rilevante, invece, è il modo in cui scegliamo di fissare alcune costanti importanti, da cui dipenderanno i risultati ottenuti in seguito. In generale possiamo considerare la seguente Lagrangiana di interazione:

$$\mathscr{L}_{\mathrm{int}} = \beta \mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) + \gamma \mathrm{Tr}\,(F_{\mu\nu}p^\mu p^\nu) + \delta \mathrm{Tr}\,(G_{\mu\nu}p^\mu p^\nu) + g_\rho(\rho_\mu^0 + \omega_\mu)J^\mu + e\frac{\lambda g_\rho}{m_\rho^2}A_\mu J^\mu \tag{5.14}$$

dove J^μ è la corrente adronica elettromagnetica e A_μ è il potenziale elettromagnetico. Imponendo ora la VMD, richiedendo cioè che dalle equazioni di Eulero–Lagrange si ricavi $\partial^\mu F_{\mu\nu} \equiv eJ_\mu^{em} \propto \rho_\mu$, otteniamo le seguenti relazioni:

$$\beta = -\frac{\sqrt{6}\lambda}{2m^2}, \qquad \delta = -\frac{2}{\sqrt{6}}\frac{\gamma m_\rho^2}{\lambda} \tag{5.15}$$

Per determinare da quanto ottenuto un valore per la costante g_ρ notiamo che l'ipotesi di VMD corrisponde idealmente ad una sostituzione $v_\mu \to v_\mu + g_\rho \rho_\mu$ negli accoppiamenti. Applicando questa osservazione alla (5.14), e tenendo conto delle normalizzazioni dei campi, si ottiene:

$$\lambda = \frac{m_\rho^2}{g_\rho}, \qquad \beta = -\frac{\sqrt{6}}{2g_\rho}. \tag{5.16}$$

La costante β si può ricavare dal decadimento $\rho \to e^+e^-$: calcolando la larghezza di decadimento si ottiene[7]

$$\Gamma_{\rho\to e^+e^-} = \frac{3}{2}\alpha \cdot \frac{m_\rho}{g_\rho^2},$$

e da $\Gamma^{\rm exp}_{\rho\to e^+e^-} \simeq 0.0071$ MeV si ricava $g_\rho \simeq 34.4$.

Nella lagrangiana resta arbitraria la costante δ (o equivalentemente la costante γ). La scelta più comune in letteratura usata per fissarne il valore è quella di utilizzare il decadimento del ρ in $\pi^+\pi^-$, se si sceglie di calcolare δ, oppure il fattore di forma elettromagnetico del pione per ottenere γ.

Mixing fotone – mesoni vettoriali

L'identificazione dei campi di una teoria di campo con le particelle fisiche è data dalla parte quadratica della lagrangiana. Se consideriamo ora la lagrangiana (5.14), utilizzata per implementare l'ipotesi di VMD nel formalismo CCWZ, vediamo che il termine proporzionale a $\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}G^{\mu\nu})$ (ricordiamo che $F_{\mu\nu}$ è la field strenght associata a v_μ) contribuisce alla parte quadratica; in particolare contribuisce con termini del tipo $\partial A\partial\rho$, e può quindi determinare un mixing fra il campo elettromagnetico e il campo dei mesoni vettoriali: questo potrebbe comportare che nella lagrangiana (5.14) il fotone acquisti massa. In questo paragrafo vogliamo mostrare che questo non accade: il mixing esiste, ma risulta molto piccolo e in ogni caso nella teoria continua ad esistere un campo vettoriale massless che trasforma come una connessione di gauge.

Dato che siamo interessati a studiare il mixing del fotone con i mesoni vettoriali consideriamo solo il campo elettromagnetico; di conseguenza gli unici mesoni vettoriali che possono avere mixing non banale con il fotone sono il ρ e l'ω (ed eventualmente il mesone ϕ se vogliamo considerare anche il singoletto). Il termine che dà origine al mixing si potrà allora scrivere, limitandosi ai termini quadratici, nella forma:

$$e\beta\mathrm{Tr}\left[\mathcal{F}_{\mu\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{6}}\omega^{\mu\nu}\right)\right]$$

[7] Il calcolo è presentato in dettaglio nel capitolo 6; nello stesso capitolo considereremo anche i decadimenti $\omega \to e^+e^-$ e $\phi \to e^+e^-$ e calcoleremo i valori di g_ρ che si ottengono da essi. Come vedremo la simmetria $SU(3)$ appare ben rispettata per quanto riguarda i mesoni ρ e ω, e appare una piccola violazione quando si considera anche il ϕ.

dove $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ è la field strenght del campo elettromagnetico, $\rho^{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \rho^\nu - \partial^\nu \rho^\mu$ e analogamente è definito $\omega^{\mu\nu}$. Studiamo di seguito il mixing con il mesone ρ; quanto ottenuto varrà anche per il mixing con l'ω, a parte un fattore numerico.

Il contributo all'azione della parte quadratica della lagrangiana sarà:

$$
\begin{aligned}
S^{(2)} = \int d^4x \; & -\frac{1}{4}(\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\nu \rho_\mu - \partial_\mu \rho_\nu)^2 \\
& + \lambda(\partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu)(\partial^\mu \rho^\nu - \partial^\nu \rho^\mu) + \frac{m_\rho^2}{2}\rho_\mu \rho^\mu.
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

dove $\lambda = \frac{e\beta}{\sqrt{2}}$. Vogliamo diagonalizzare la parte quadratica; per fare questo è utile scrivere la (5.17) come forma quadratica: integriamo per parti e otteniamo

$$
\begin{aligned}
S^{(2)} = \int d^4x \; & \frac{1}{2} v_\mu \partial^2 v^\mu - \frac{1}{2} v_\mu \partial^\mu \partial_\nu \rho^\nu + \frac{1}{2}\rho_\mu \partial^2 \rho^\mu - \frac{1}{2}\rho_\mu \partial^\mu \partial_\nu \rho^\nu \\
& + 2\lambda v_\mu \partial^2 \rho^\mu - 2\lambda v_\mu \partial^\mu \partial_\nu \rho^\nu + \frac{m_\rho^2}{2}\rho_\mu \rho^\mu
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

che possiamo facilmente riscrivere in termini di una forma quadratica:

$$
S^{(2)} = \frac{1}{2}\int \begin{pmatrix} v_\mu \\ \rho_\mu \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \delta^\mu_\nu \partial^2 - \partial^\mu \partial_\nu & 2\lambda(\delta^\mu_\nu \partial^2 - \partial^\mu \partial_\nu) \\ 2\lambda(\delta^\mu_\nu \partial^2 - \partial^\mu \partial_\nu) & \delta^\mu_\nu \partial^2 - \partial^\mu \partial_\nu + \delta^\mu_\nu m_\rho^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^\nu \\ \rho^\nu \end{pmatrix}. \tag{5.19}
$$

Diagonalizzando la (5.19) possiamo determinare i campi fondamentali della teoria, e scrivendo la forma quadratica nella nuova base possiamo vedere se il fotone acquista o meno massa. Consideriamo quindi la trasformazione

$$
\begin{array}{lcl}
\rho_\mu & \rightarrow & \rho'_\mu = \rho_\mu \cdot \sqrt{1 - 4\lambda^2} \\
v_\mu & \rightarrow & v'_\mu \equiv v_\mu + 2\lambda \rho_\mu = v'_\mu + \sqrt{2} \cdot e\beta \rho_\mu.
\end{array}
\tag{5.20}
$$

Nella base data dalle (5.20) la (5.18) diventa:

$$
S^{(2)} = \frac{1}{2}\int \begin{pmatrix} v'_\mu \\ \rho'_\mu \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \delta^\mu_\nu \partial^2 - \partial^\mu \partial_\nu & 0 \\ 0 & \delta^\mu_\nu \partial^2 - \partial^\mu \partial_\nu + \delta^\mu_\nu m'^2_\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v'^\nu \\ \rho'_\nu \end{pmatrix}.
$$

con $m'^2_\rho = \dfrac{m_\rho^2}{1 - 4\lambda^2}$. Quindi il fotone rimane massless, ma c'è un mixing con il mesone ρ che, in accordo con le (5.20), tenendo conto della matrice di carica, risulta:

$$
A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \sqrt{3}\beta \rho_\mu. \tag{5.21}
$$

Tale mixing è piccolo perché, come visto poco sopra, l'ipotesi di Vector Meson Dominance implica $\beta = \frac{\sqrt{6}}{g_\rho\sqrt{2}}$, e $g_\rho \simeq 34.4$. Inoltre abbiamo un riscalamento della massa del ρ: è dato da un fattore $4\lambda^2 \simeq 2e^2\beta^2$, che è molto minore di 1 e porta a correzioni trascurabili.

In conclusione il termine lagarangiano proporzionale a Tr $F_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$ non rende massivo il fotone e non modifica sostanzialmente la dinamica della teoria; l'unico effetto rilevante è quello che ha sul decadimento leptonico del mesone ρ: come accennato in precedenza, e mostrato più in dettaglio nel capitolo 6, il mixing con il fotone permette di ottenere un ampiezza non nulla per il decadimento $\rho \to e^+e^-$; il motivo che rende rilevante tale decadimento – la cui branching ratio è in realtà molto piccola – è che da esso si può determinare la costante g_ρ.

5.4 Anomalie chirali e mesoni vettoriali

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che un modo per tener conto dell'anomalia chirale nelle teorie effettive di bassa energia è introdurre il funzionale di Wess–Zumino; in questa maniera compaiono nuovi vertici di interazione fra i mesoni pseudoscalari e i campi di gauge del Modello Standard. Estendendo la teoria efficace per includere anche i mesoni vettoriali dell'ottetto ci si può chiedere se l'anomalia abbia conseguenze anche sulla dinamica di questi ultimi. In letteratura [1, 8, 13, 18, 12] si possono trovare diversi lavori nei quali viene mostrato come, utilizzando una qualche forma di VMD, si possano legare le interazioni dei mesoni vettoriali all'anomalia. Una nota prima di proseguire: non sarebbe necessario, a priori, ricorrere all'anomalia per introdurre queste interazioni, ma supporre un collegamento con l'anomalia chirale permette di fissare a priori la costante di accoppiamento; se invece introduciamo una alla volta queste interazioni ognuna di esse avrà una sua costante di accoppiamento, e quindi sarebbe necessaria una misura sperimentale per ogni vertice.

Quello che vogliamo fare in seguito è proporre un modo per ricavare termini di interazione legati all'anomalia chirale a partire dall'ipotesi VMD così come introdotta nella sezione precedente. Abbiamo infatti mostrato che il funzionale di Wess–Zumino modifica le correnti di flavor, come dato dalle (5.11) (5.12). Per ripristinare l'ipotesi di VMD è quindi necessario introdurre un nuovo funzionale che contenga anche i campi dei mesoni vettoriali; tale funzionale non dovrà modificare la forma dell'anomalia chirale e il suo contributo alle equazioni del moto dovrà fare in modo che le correnti a cui accoppiano i campi di gauge e i mesoni vettoriali siano uguali (a meno di una costante moltiplicativa).

Si potrebbe costruire a mano un tale funzionale, imponendo ordine per ordine l'uguaglianza dei contributi; oltre il primo ordine risulta però piuttosto macchinoso. Nei paragrafi precedenti abbiamo però discusso un funzionale di Wess–Zumino modificato[8], che dipende da un ulteriore campo a valori in $\mathfrak{su}(3)$; risulta quindi un candidato per estendere il Wess–Zumino standard: proviamo a calcolarne la variazione rispetto ai campi di gauge ed al campo di background. Alcune note su come deve essere effettuata la variazione: prima di tutto la VMD va imposta solo relativamente al sottogruppo $SU(3)_V$, quindi la variazione dei campi deve essere "vettoriale"; in secondo luogo i campi da variare non sono proprio i campi di background, R_0 e L_0, ma il campo A_0 (che si vuole identificare con i mesoni vettoriali): quindi, se $A_0 \to A_0 + \varepsilon$, allora $R_0 \to R_0 + e^{-i\xi}\varepsilon e^{i\xi}$ e $L_0 \to L_0 + e^{i\xi}\varepsilon e^{-i\xi}$. Ora, invece di calcolare esplicitamente le due variazioni (che potrebbe risultare un po' complicato) possiamo ricorrere agli strumenti sviluppati nel capitolo 3: infatti la definizione degli operatori d_λ, l_λ e le relazioni ottenute (descent equations etc.) non sono vincolate alla dipendenza esplicita dei campi da λ, ma solamente alle relazioni algebriche che essi soddisfano [25]. Quindi, se definiamo $R_\lambda = R + \lambda v$ e $L_\lambda = L + \lambda v$ ($v \equiv v^a T^a$ sia per la parte right che per la parte left, dato che la variazione deve essere "vettoriale") la derivata rispetto a λ corrisponde ad applicare d_λ; analogamente inoltre si può fare per R_0 ed L_0.

Calcoliamo allora le variazioni. Cominciamo col notare che Γ_{WZ}, come dato dalla (5.8), si può riscrivere nella forma ($g = e^{i\xi}$):

$$\Gamma_{WZ} = -\int_D \omega^0_{2n-1}(\hat{A}_g, \hat{A}_0) + \omega^0_{2n-1}(\hat{A}_0, \hat{A}_{\mathfrak{h}}) + \omega^0_{2n-1}(\hat{A}_h, \hat{A}). \tag{5.22}$$

Il secondo termine non contribuisce, perché ω^0_{2n-1} è identicamente nulla se i due argomenti sono vettoriali. Per calcolare gli altri contributi utilizziamo la relazione $d_\lambda = dl_\lambda - l_\lambda d$, dove l'azione di l_λ è definita da $l_\lambda \hat{A} = (v, v)$. Dato che $d\omega^0_{2n-1} = 0$ per ragioni dimensionali, rimane $d_\lambda = dl_\lambda$. La variazione rispetto ad $\hat{A}$ dell'ultimo termine coincide allora con l'anomalia chirale; quindi è nulla, perché (v, v) è vettoriale. Rimane da calcolare $dl_\lambda \omega^0_{2n-1}(\hat{A}_g, \hat{A}_0)$; usando le descent equations (3.11) e applicando Stokes[9] si ottiene allora:

$$d_\lambda \Gamma_{WZ} = -\int_M \omega^1_{2n-1}(g^{-1}vg, R_g, R_0) - (\text{left}). \tag{5.23}$$

[8]Cioè il funzionale di Wess–Zumino in presenza di background covariante.

[9]Su $M \times \{0\}$ $\hat{A}$, $\hat{A}_g$ e $\hat{A}_0$ coincidono, quindi tutte le ω^p_{2n-1-p} si annullano.

Passiamo ora alla variazione rispetto ad $\hat{A}_0$. L'unico termine della (5.22) che contribuisce è il primo; possiamo definire l_λ analogamente al caso precedente, con l'unica differenza che ora $l_\lambda \hat{A}_0 = (e^{-i\xi} v e^{i\xi}, e^{i\xi} v e^{-i\xi})$. Allora utilizzando descent equations, teorema di Stokes e antisimmetria di ω^0_{2n-1} si ottiene:

$$d_\lambda \Gamma_{WZ} = + \int_M \omega^1_{2n-1}(g^{-1} v g, R_g, R_0) - (\text{left}). \tag{5.24}$$

Quindi, a meno di un segno, le due variazioni (5.23) e (5.24) sono uguali. Identificando opportunamente A_0 con il campo dei mesoni vettoriali, sostituire il Wess–Zumino classico (5.6) con (5.8) è allora un modo per ristabilire[10] la Vector Meson Dominance.

5.4.1 Sviluppo al primo ordine di $\Gamma_{WZ}(g, A, A_0)$

Supponiamo ora di introdurre il funzionale di Wess–Zumino con campi di background (identificando opportunamente questi ultimi con il campo dei mesoni vettoriali) nell'azione efficace; questo comporta chiaramente la comparsa di nuove interazioni: in questa sezione ci proponiamo allora di scrivere lo sviluppo al primo ordine in A e al primo ordine in A_0 di Γ_{WZ} in modo da poter leggere i vertici che coinvolgono al più un campo di gauge e/o un mesone vettoriale. Lo sviluppo sarà fatto nel caso $n = 3$, che è quello che ci interessa per le applicazioni pratiche. Prima di tutto notiamo che da Γ_B, definito dalla (5.7), non abbiamo contributi: scrivendolo esplicitamente, grazie alla (3.17), si vede subito che ogni termine contiene o due campi di gauge o due campi di background. Rimane quindi da sviluppare:

$$\widetilde{\Gamma}_m + \widetilde{\Gamma}_A = - \int_D \omega^0_5(\hat{A}_{0,g}, \hat{A}_0) + \int_M \zeta(\hat{A}_g, \hat{A}_{0,g}, \hat{A}_0)$$

Risulta (qui adottiamo la convenzione $R_{0g} \equiv g^{-1} R_0 g$ e $R_g \equiv g^{-1} R g$):

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}_m \sim & - 3 \int_D \int_0^1 dt\, P \left\{ R_{0g} \wedge F(tg^{-1}dg)^2 - R_0 \wedge F(tg^{-1}dg)^2 \right\} \\
& - 3 \int_D \int_0^1 dt\, P \left\{ g^{-1}dg \wedge \left[F(tg^{-1}dg)^2 + F(tg^{-1}dg) \wedge [tR_{0g},\ tg^{-1}dg] \right.\right. \\
& + F(tg^{-1}dg) \wedge [tg^{-1}dg,\ (1-t)R_0] + (tdR_{0g} + (1-t)dR_0) \wedge F(tg^{-1}dg) \\
& \left.\left. + F(tg^{-1}dg) \wedge (tdR_{0g} + (1-t)dR_0) \right] \right\} - (\text{left})
\end{aligned}$$

[10]Si intende chiaramente dire che con questa scelta il funzionale di Wess–Zumino non porta contributi non coerenti con l'ipotesi di VMD. Questo certamente non esclude che termini presenti in altre parti della lagrangiana fenomenologica non violino la VMD.

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}_A \sim 3 \int_M \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2\, SP \left\{ g^{-1}dg,\ R_g,\ t_2 dR_{0g} + (1-t_1-t_2)dR_0 + \right. \\
& F((t_1+t_2)g^{-1}dg) + t_2(t_1+t_2)[R_g,\ g^{-1}dg] + (t_1+t_2)(1-t_1-t_2)[g^{-1}dg,\ R_0] \} \\
& - SP \left\{ g^{-1}dg,\ R_0,\ t_1 dR_g + F((t_1+t_2)g^{-1}dg) + t_1(t_1+t_2)[R_g,\ g^{-1}dg] \right\} \\
& + SP \left\{ g^{-1}dg,\ g^{-1}dg,\ t_1 dR_g + t_2 dR_{0g} + F((t_1+t_2)g^{-1}dg) + (1-t_1-t_2)dR_0 \right. \\
& + t_1 t_2 [R_g,\ R_{0g}] \wedge + t_1(t_1+t_2)[R_g,\ g^{-1}dg] + t_1(1-t_1-t_2)[R_g,\ R_0] \\
& \left. + t_2(t_1+t_2)[R_{0g},\ g^{-1}dg] + (t_1+t_2)(1-t_1-t_2)[g^{-1}dg,\ R_0] \right\} \\
& + SP \left(R_{0g} - R_0,\ R_g + g^{-1}dg,\ F(t_1 R_g + t_2 R_{0g} + (1-t_2-t_2)R_0) \right) - (\text{left})
\end{aligned}
$$

dove abbiamo lasciato inespresso l'ultimo termine dato che nel limite $g \to 1$ va a zero. Eseguendo gli integrali nei parametri:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}_m \sim & -3 \int_D \int_0^1 dt\, P \left\{ -\frac{1}{3} R_{0g} \wedge [g^{-1}dg,\ g^{-1}dg]^2 + \frac{1}{3} R_0 \wedge [g^{-1}dg,\ g^{-1}dg]^2 \right\} \\
& -3 \int_D \int_0^1 dt\, P \left\{ g^{-1}dg \wedge \left[\frac{1}{120} [g^{-1}dg,\ g^{-1}dg]^2 \right. \right. \\
& - \frac{1}{40} [g^{-1}dg,\ g^{-1}dg] \wedge [R_{0g},\ g^{-1}dg] - \frac{1}{60} [g^{-1}dg,\ g^{-1}dg] \wedge [g^{-1}dg,\ R_0] \\
& \left. \left. - \frac{1}{24} (dR_{0g} + dR_0) \wedge [g^{-1}dg,\ g^{-1}dg] - \frac{1}{24} [g^{-1}dg,\ g^{-1}dg] \wedge (dR_{0g} + dR_0) \right] \right\} \\
& - (\text{left})
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}_A \sim 3 \int_M & SP \left\{ g^{-1}dg,\ R_g,\ \frac{1}{6} dR_{0g} + \frac{1}{6} dR_0 - \frac{1}{24} [g^{-1}dg,\ g^{-1}dg] \right. \\
& \left. + \frac{1}{8} [R_g,\ g^{-1}dg] + \frac{1}{12} [g^{-1}dg,\ R_0] \right\} \\
& - SP \left\{ g^{-1}dg,\ R_0,\ \frac{1}{6} dR_g - \frac{1}{24} [g^{-1}dg,\ g^{-1}dg] + \frac{1}{8} [R_g,\ g^{-1}dg] \right\} \\
& + SP \left\{ g^{-1}dg,\ g^{-1}dg,\ \frac{1}{6} dR_g + \frac{1}{6} dR_{0g} - \frac{1}{24} [g^{-1}dg,\ g^{-1}dg] + \frac{1}{6} dR_0 \right. \\
& \left. + \frac{1}{24} [R_g,\ R_{0g}] + \frac{1}{8} [R_g,\ g^{-1}dg] + \frac{1}{24} [R_g,\ R_0] + \frac{1}{8} [R_{0g},\ g^{-1}dg] + \frac{1}{12} [g^{-1}dg,\ R_0] \right\} \\
& + \int_0^1 dt_1 \int_0^{1-t_1} dt_2\, SP \left(R_{0g} - R_0,\ R_g + g^{-1}dg,\ F(t_1 R_g + t_2 R_{0g} + (1-t_2-t_2)R_0) \right) \\
& - (\text{left}).
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

Gli sviluppi riportati alla fine di questo capitolo saranno utilizzati in seguito per dedurre i contributi del funzionale (5.8) ad alcuni processi adronici, come ad esempio i decadimenti del mesone ω.

CAPITOLO 6

Applicazioni al Modello Standard

Abbiamo visto nei capitoli precedenti le proprietà delle anomalie e le implicazioni a livello di teorie fenomenologiche. Quello che ci proponiamo di fare in questo capitolo è di approfondire questo aspetto, concentrandoci sul settore adronico del Modello Standard e studiando le modifiche alle ampiezze di decadimento dovute all'introduzione di termini "anomali" all'interno della Lagrangiana fenomenologica e confrontando quanto ottenuto con i dati sperimentali. Dato che ci si aspetta che le previsioni di una tale teoria siano attendibili solo a basse energie (nel caso particolare per energie minori della scala della QCD, $\Lambda_{QCD} \sim 1.1$ GeV) considereremo solamente i mesoni pseudoscalari e i mesoni vettoriali.

La prima delle applicazioni che considereremo è la più classica, il decadimento $\pi^0 \to 2\gamma$: utilizzando l'algebra delle correnti (ipotesi PCAC [17]) e ignorando l'anomalia chirale si ottiene un'ampiezza di decadimento che va a zero per $m_\pi \to 0$, mentre il processo in analisi costituisce il canale principale per il decadimento del π^0, con una branching ratio di circa[1] il 98.8%; utilizzando invece la teoria efficace con il termine di Wess–Zumino si ottiene una previsione per la larghezza di decadimento in ottimo accordo con il dato sperimentale.

Successivamente passeremo allo studio dei risultati a livello di ampiezze di decadimento per i mesoni vettoriali che si ottengono se si include nella teoria effettiva il funzionale di Wess–Zumino modificato (5.8). In particolare studieremo i decadimenti

[1] Tutti i dati numerici utilizzati in questo capitolo sono presi dal Particle Data Group 2006 [35]

principali del mesone ω, cioè $\omega \to \pi^+\pi^-\pi^0$ e $\omega \to \pi^0\gamma$. Prima di questo discuteremo però più in dettaglio il calcolo delle ampiezze per i decadimenti leptonici dei mesoni vettoriali, di cui abbiamo parlato brevemente nel capitolo 5; in particolare otterremo un valore per la costante di accoppiamento g_ρ, che useremo per calcolare le due ampiezze di decadimento del mesone ω.

6.1 Decadimento $\pi^0 \to 2\gamma$

Il decadimento principale del π^0 è quello in due fotoni, con una larghezza di decadimento di circa 8 eV. Proviamo a scrivere l'ampiezza del processo [28]; siano p e q i quadrimpulsi finali dei due fotoni e k il quadrimpulso del pione. Siano poi $\epsilon(p), \epsilon'(q)$ le polarizzazioni dei due fotoni. L'elemento di matrice del processo avrà allora la forma generale

$$\left\langle \pi^0 | p, q \right\rangle = \epsilon_\mu(p)\epsilon'_\nu(q)T^{\mu\nu}(p,q)$$

L'ampiezza dovrà essere Lorentz–invariante e conservare la parità; dato che il π^0 ha parità -1 avremo allora

$$T^{\mu\nu}(p,q) = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha q_\beta T(k^2)$$

Utilizzando le formule LSZ possiamo ora riscrivere $T^{\mu\nu}$ nella forma

$$T^{\mu\nu}(p,q) = (\mu^2 - k^2)\,\langle 0|\phi(0)|p,q\rangle$$

dove μ è la massa del π^0, che per ora consideriamo una variabile, e ϕ un qualunque campo interpolante per il pione, cioè un campo locale che soddisfi $\langle 0|\phi(0)|\pi\rangle \neq 0$ (assumeremo tale elemento di matrice normalizzato a 1). Ora, la lagrangiana di interazione col campo elettromagnetico è $eJ^\mu A_\mu$; inoltre all'ordine zero il campo interpolante del pione ha elemento di matrice nullo tra il vuoto e lo stato di due fotoni. Quindi, al primo ordine non banale, possiamo riscrivere[2]

$$T^{\mu\nu}(p,q) = e^2(\mu^2 - k^2)\int d^4x\; d^4y\; e^{-ipx}e^{-ipy}\,\langle 0|T[J^\mu(x)J^\nu(y)\phi(0)]|0\rangle$$

[2]In realtà bisognerebbe tener conto di un problema di definizione del prodotto T–ordinato in presenza di campi a tempo fissato, nel nostro caso $\phi(0)$, ma si può mostrare [17] che non influenza i risultati a cui siamo interessati.

Come campo interpolante utilizziamo la divergenza della corrente assiale neutra J_5^μ:

$$\phi(0) \equiv \frac{\partial_\mu J_5^\mu(0)}{f\mu^2}$$

dove f è definita da $\left\langle 0|J_5^\mu|\pi^0\right\rangle = ip^\mu f$ e la quantità al denominatore è quella necessaria per normalizzare a 1 l'elemento di matrice vuoto–π^0. Possiamo allora ottenere, usando[3] $[J_5^0(0,\mathbf{x}), j^\mu(0)] = 0$, la seguente espressione per $T^{\mu\nu}$:

$$T^{\mu\nu}(p,q) = \frac{(\mu^2 - k^2)}{f\mu^2} k_\alpha T^{\alpha\mu\nu}(p,q) \tag{6.1}$$

con

$$T^{\alpha\mu\nu}(p,q) \equiv -ie^2 \int d^4x\, d^4y\, e^{-ipx} e^{-ipy} \left\langle 0|T[J^\mu(x)J^\nu(y)J_5^\alpha(0)]|0\right\rangle$$

Notiamo alcune proprietà di $T^{\alpha\mu\nu}$: dato che i fotoni soddisfano la simmetria di Bose, $T^{\alpha\mu\nu}(p,q) = T^{\alpha\nu\mu}(q,p)$; poi, dato che J_5^α è uno pseudovettore, deve avere parità +1. Infine, per l'invarianza di gauge, deve essere trasverso ai due impulsi p e q. Si può ora scrivere la forma più generale compatibile con queste simmetrie[4] e ottenere, dalla (6.1),

$$T(k^2) = \frac{\mu^2 - k^2}{f\mu^2} k^2 (F_1(k^2) - F_3(k^2)) \tag{6.2}$$

Assumiamo, seguendo le prescrizioni dell'ipotesi PCAC, che i fattori di forma F_i siano liberi da singolarità per $k^2 \to 0$; allora dalla (6.2) segue immediatamente che $T(0) = 0$: l'ampiezza di decadimento del pione in 2γ va a zero nel limite di massa zero per il π^0. Nell'ipotesi PCAC questo implica, dato che la massa del π^0 è piccola rispetto alle scale di energia tipiche del Modello Standard, un'ampiezza di decadimento decisamente inferiore a quella misurata sperimentalmente.

L'errore che abbiamo commesso è stato quello di supporre conservata (parzialmente) la corrente assiale, e di utilizzare quindi gli usuali commutatori a tempi coincidenti. La simmetria assiale è in realtà anomala (si può verificare esplicitamente riportando quanto calcolato nei paragrafi precedenti al caso abeliano), e quindi la corrente J^μ non è conservata nemmeno nel limite chirale. Vogliamo ora vedere come tenendo

[3] Anche in questo caso bisognerebbe tener conto di un termine ulteriore, ma si può vedere [17] che non contribuisce al risultato finale.

[4] La forma più generale di $T^{\alpha\mu\nu}(p,q)$ risulta:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\mu\nu} &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho q_\sigma k^\alpha F_1(k^2) + (\varepsilon^{\alpha\mu\rho\sigma} q^\nu - \varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} p^\mu) p_\rho q_\sigma F_2(k^2) \\ &+ (\varepsilon^{\alpha\mu\rho\sigma} p^\nu - \varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} q^\mu) p_\rho q_\sigma F_3(k^2) + \varepsilon^{\alpha\mu\nu\rho}(p_\rho - q_\rho) k^2 \frac{F_3(k^2)}{2} \end{aligned}$$

conto dell'anomalia chirale, attraverso il funzionale di Wess–Zumino, si ottengano previsioni in buon accordo sperimentale per l'ampiezza del decadimento $\pi^0 \to 2\gamma$.

Consideriamo infatti il funzionale di WZ in presenza del solo campo elettromagnetico A_μ, che corrisponde a

$$V_\mu(x) = eA_\mu(x)Q$$

dove $Q = \mathrm{diag}(2/3, -1/3, -1/3)$ è la matrice di carica. Ci interessano i vertici con un solo mesone pseudoscalare: sviluppiamo quindi l'esponenziale nella (2.21) all'ordine zero; dato che non ci sono campi assiali avremo, usando per l'anomalia la forma (2.13):

$$\begin{aligned} S_I &= \frac{N_c}{48\pi^2 f_\pi} \int d^4x \; \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} 3\mathrm{Tr}[\phi(x) G_{\mu\nu}(x) G_{\rho\sigma}(x)] \\ &= \frac{e^2 N_c}{16\pi^2 f_\pi} \int d^4x \; \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{Tr}[\phi(x) F_{\mu\nu}(x) F_{\rho\sigma}(x) Q^2] \end{aligned} \tag{6.3}$$

dove $F_{\mu\nu}$ è la field strenght del campo elettromagnetico. Dato che siamo interessati solo al π^0 possiamo ridurre la matrice dei mesoni pseudoscalari (4.16) a:

$$\phi = \frac{\pi^0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sostituendo nella (6.3) ed effettuando la traccia sugli indici di flavor otteniamo allora:

$$S_I = \frac{\alpha N_c}{6\pi f_\pi} \int d^4x \; \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \pi^0 \partial_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma. \tag{6.4}$$

La costante di accoppiamento così ottenuta, $g = \frac{\alpha N_c}{6\pi f_\pi}$, vale circa $0.407 \cdot N_c \cdot 10^{-5}$ MeV e, se poniamo $N_c = 3$ è coerente col dato sperimentale, $g \simeq 1.23 \cdot 10^{-5}$ MeV.

6.2 Decadimenti dei mesoni vettoriali

Ci vogliamo ora occupare dei mesoni vettoriali. In particolare vogliamo applicare i risultati dei capitoli precedenti ad alcuni decadimenti.

Come prima cosa vogliamo studiare i decadimenti leptonici (in e^+e^-) dei mesoni scarichi, cioè ρ, ω e ϕ. Come lagrangiana utilizzeremo quella scritta per implementare la Vector Meson Dominance nel formalismo CCWZ.

La seconda applicazione che proponiamo è il calcolo delle larghezze di riga dei due principali decadimenti del mesone ω (cioè il decadimento in $\pi^+\pi^-\pi^0$ e in $\pi^0\gamma$) come dato dai vertici presenti in Γ_{WZ}. I decadimenti in questione sono gli stessi considerati nei vari lavori nei quali si è tentato di legare i mesoni vettoriali alle anomalie chirali [1, 8, 18, 12], data dalle (5.13) (5.14).

Per fare il calcolo identificheremo il campo ρ con il campo di background utilizzato nella costruzione del funzionale (5.8) come specificato nel capitolo 5. Le convenzioni sulla normalizzazione dei mesoni, pseudoscalari e vettoriali, sono fissate rispettivamente dalle equazioni (4.16) e (4.22), con l'accortezza che $e^{i\phi/f_\pi}$ deve essere esteso alla varietà 5–dimensionale D, e quindi[5] a $g(\tau, x) = e^{i\varphi(\tau)\phi(x)/f_\pi}$ con $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$.

6.2.1 Decadimenti leptonici

Come visto nel capitolo 5 la lagrangiana di interazione (5.14) comporta un piccolo mixing fra i mesoni vettoriali scarichi e il fotone. Inoltre, come già notato, i mixing dei tre mesoni ρ^0, ω e ϕ differiscono solo per una costante. In questo paragrafo, nel quale vogliamo studiare i decadimenti in coppie di elettroni–positroni, possiamo quindi considerarne uno dei tre, sapendo che basta riscalare opportunamente i risultati ottenuti per trasportarli agli altri due mesoni.

Consideriamo quindi il decadimento $\rho^0 \to e^+e^-$: la branching ratio sperimentale è di $(4.70 \pm 0.08) \cdot 10^{-5}$, che corrisponde ad una larghezza di decadimento di $\Gamma^{\text{exp}}_{\rho^0 \to e^+e^-} = (0.0071 \pm 0.0003)$ MeV. Nonostante la branching ratio sia così piccola, consideriamo importante lo studio di questo decadimento in quanto permette di fissare la costante g_ρ.

Come anticipato, i vertici che contribuiscono al decadimento si ottengono sfruttando il mixing col fotone, come dato dalle (5.21): contribuisce a livello albero allora solo quello che si ottiene dal vertice elettromagnetico γe^+e^-, che corrisponde al termine lagrangiano $e\overline{\psi}_e \not{A} \psi_e$. Avremo quindi un'interazione data da: $\sqrt{3}\beta \mathrm{Tr}(\overline{\psi}\not{\rho}\psi)$ (la traccia si riferisce agli indici di $SU(3)$). Mediando sulle polarizzazioni del ρ e sommando sullo spin finale dei leptoni otteniamo per la larghezza di decadimento il seguente risultato:

$$\Gamma_{\rho^0 \to e^+e^-} = \frac{3}{2}\alpha\frac{m_\rho}{g_\rho^2}.$$

Per estendere il risultato agli altri due mesoni basta moltiplicare per un fattore r_V^2,

[5] Si veda il capitolo 5 per i dettagli.

quindi:

$$\Gamma_{V\to e^+e^-} = \frac{3}{2}\alpha\frac{m_V}{g_\rho^2}r_V^2.$$

con $r_{\rho^0} = 1$, $r_\omega = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ e $r_\phi = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ (valori che si ottengono tenendo conto delle diverse normalizzazioni dei mesoni, come date dalla (4.22), e del mixing $\omega - \phi$, che si è supposto essere di circa 30° [21]). Confrontando il risultato ottenuto coi dati sperimentali si ottiene allora:

Decadimento	$\Gamma^{\rm exp}$	g_ρ
$\rho^0 \to e^+e^-$	(7.1 ± 0.3) keV	34.4 ± 1.5
$\omega^0 \to e^+e^-$	(0.61 ± 0.02) keV	34.2 ± 1.2
$\phi^0 \to e^+e^-$	(1.27 ± 0.04) keV	33.2 ± 1.1

(6.5)

in buon accordo con la simmetria $SU(3)$. Il valore di g_ρ appena ottenuto risulterà utile nei prossimi due paragrafi, nei quali ci proponiamo di calcolare gli effetti del funzionale di Wess–Zumino, modificato come spiegato nel capitolo 5, alla dinamica dei mesoni vettoriali.

6.2.2 Decadimento $\omega \to \pi^+\pi^-\pi^0$

Dalle espressioni (5.25) e (5.26) possiamo leggere i contributi al processo $\omega \to 3\pi$: i termini rilevanti risultano

$$\begin{aligned}
&+\frac{N_c}{24\pi^2}\frac{3}{24}\int_D \mathrm{Tr}\left(g^{-1}dg\wedge(dR_0+dR_{0g})\wedge[g^{-1}dg,\ g^{-1}dg]\right.\\
&\left.+g^{-1}dg\wedge[g^{-1}dg,\ g^{-1}dg]\wedge(dR_0+dR_{0g})\right)\\
&+\frac{N_c}{24\pi^2}\int_M \mathrm{Str}\left(\frac{3}{24}g^{-1}dg\wedge R_0\wedge[g^{-1}dg,\ g^{-1}dg]+\frac{3}{8}g^{-1}dg\wedge g^{-1}dg\wedge[R_{0g},\ g^{-1}dg]\right.\\
&\left.+\frac{3}{12}g^{-1}dg\wedge g^{-1}dg\wedge[g^{-1}dg,\ R_0]\right) - (\mathrm{left})
\end{aligned} \tag{6.6}$$

La prima parte di questa espressione si può ricondurre ad un'ordinario integrale di una densità quadridimensionale: infatti, data la forma esplicita di $g(\tau,x)$, l'integrazione sul fattore $[0,1]$ in $D = M\times[0,1]$ si può effettuare direttamente, ottenendo:

$$-\frac{N_c}{24\pi^2}\frac{6}{24}\int_M \mathrm{Tr}\left(g^{-1}dg\wedge(R_0+R_{0g})\wedge[g^{-1}dg,\ g^{-1}dg]\right)$$

Se ora sviluppiamo g al primo ordine, dall'espressione (6.6) otteniamo i contributi al decadimento $\omega \to 3\pi$. Utilizzando le espressioni (4.16) e (4.22) ricaviamo, con un paio di integrazioni per parti, un'interazione data da:

$$T_{\omega\to 3\pi} = \frac{N_c}{24\pi^2 f_\pi^3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) g\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{Tr}\left(\rho_\mu[\partial_\nu\phi, \partial_\rho\phi]\partial_\sigma\phi\right),$$

da cui[6]:

$$\mathcal{M} \equiv \left\langle \omega | T_{\omega\to 3\pi} | \pi^+\pi^-\pi^0 \right\rangle = \frac{3\sqrt{2}N_c g_\rho}{48\pi^2 f_\pi^3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_\mu p_\nu^+ p_\rho^- p_\sigma^0$$

dove ϵ_μ è il vettore polarizzazione dell'ω. Calcolando[7] la larghezza di decadimento associata a $\mathcal{M}$ si ottiene

$$\Gamma_{\omega\to\pi^+\pi^-\pi^0} \simeq 0.00744 \cdot g_\rho^2 \text{ MeV} \simeq (8.6 \pm 0.8) \text{ MeV}.$$

6.2.3 Decadimento $\omega \to \pi^0\gamma$

Consideriamo ora l'altro processo, cioè il decadimento $\omega \to \pi^0\gamma$. Procedendo come nel paragrafo precedente possiamo isolare i contributi che provengono da Γ_{WZ}, ottenendo:

$$\frac{N_c}{24\pi^2}\int_M \frac{1}{2}\left[\mathrm{Str}\left(g^{-1}dg \wedge R_g \wedge (dR_{0g} + dR_0) - g^{-1}dg \wedge R_0 \wedge dR_g\right)\right] - (\text{left})$$

L'elemento di matrice per l'interazione si ricava anche in questo caso sviluppando g al primo ordine:

$$T_{\omega\to\pi^0\gamma} = \frac{N_c}{24\pi^2}\int_M \frac{3eg_\rho}{2f_\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\left(\omega_\mu Q\partial_\nu A_\rho \partial_\sigma\phi\right)$$

(dove A_μ è il potenziale elettromagnetico e abbiamo introdotto la matrice di carica Q). Possiamo ora ricavare l'elemento di matrice per il decadimento $\omega \to \pi^0\gamma$, facendo attenzione al fatto che anche in questo caso va considerato il mixing $\omega - \phi$:

$$\mathcal{M} \equiv \left\langle \omega | T_{\omega\to\pi^0\gamma} | \pi^0\gamma \right\rangle = 0.249 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{eg_\rho N_c}{12\pi^2 f_\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_\mu(\omega)\epsilon_\rho(\gamma)p_\nu^\gamma p_\sigma^0$$

[6] Per il coefficiente numerico si è tenuto conto anche del mixing $\omega - \phi$, che si è supposto essere di circa 30° [21].

[7] I dati numerici sono presi da quelli forniti nel 2006 dal Particle Data Group [35]. L'integrazione sullo spazio delle fasi è stata effettuata numericamente.

da cui si calcola immediatamente la larghezza di decadimento:

$$\Gamma_{\omega\to\pi^0\gamma} \simeq 0.685 \cdot 10^{-3} \cdot g_\rho^2 \text{ MeV} = (0.79 \pm 0.07) \text{ MeV}$$

Possiamo ora confrontare i risultati ottenuti: si nota immediatamente che il rapporto fra le due larghezze di decadimento calcolate è indipendente dalla costante di accoppiamento g_ρ, e risulta $\frac{\Gamma_{\omega\to\pi^0\gamma}}{\Gamma_{\omega\to 3\pi}} \simeq 0.087$, da confrontare con il dato sperimentale: $\left(\frac{\Gamma_{\omega\to\pi^0\gamma}}{\Gamma_{\omega\to 3\pi}}\right)^{\exp} = 0.097 \pm 0.05$. Inoltre possiamo confrontare il dato ottenuto con le misure sperimentali per i due decadimenti:

Decadimento	$\Gamma^{\exp}$(MeV)	Γ(Mev)
$\omega \to \pi^0\pi^+\pi^-$	7.56 ± 0.13	8.6 ± 0.8
$\omega \to \pi^0\gamma$	0.76 ± 0.03	0.79 ± 0.07

Quindi i risultati ottenuti sono in accordo con le misure sperimentali; in particolare notiamo che l'errore commesso risulta inferiore al $\sim 10\%$ tipico delle teorie fenomenologiche basate sulla simmetria chirale $SU(3)$ [17].

CAPITOLO 7

Conclusioni

Nel corso di questo lavoro abbiamo studiato alcuni aspetti del legame fra le anomalie chirali e i processi adronici. Dopo aver presentato l'approccio coomologico al problema delle anomalie e aver ricavato le *descent equations* (3.11), abbiamo descritto la costruzione del funzionale di Wess–Zumino, con particolare attenzione al caso in cui sia necessario introdurre una connessione di background per tener conto della non banalità del fibrato principale che definisce la teoria di gauge in esame.

Successivamente, a partire dallo studio di diversi lavori [1, 7, 8, 12, 13, 18], abbiamo considerato la possibilità che le ampiezze relative ad alcuni processi adronici che coinvolgono i mesoni vettoriali ricevano contributi rilevanti dalle anomalie chirali. Per studiare questo fenomeno, che, come appare dai lavori citati poco sopra, sembra fortemente legato all'ipotesi di Vector Meson Dominance, abbiamo utilizzato l'approccio di Lee e Zumino [21] per implementare la VMD nel framework scelto per le teorie fenomenologiche di campo, cioè quello proposto da Callan, Coleman, Wess e Zumino [5, 4]. Sotto le ipotesi di tale modello la VMD, cioè il fatto che la corrente elettromagnetica sia proporzionale al campo dei mesoni vettoriali, risulta conseguenza delle equazioni del moto, e quindi è un'identità dinamica, a differenza delle ipotesi "VMD" più forti, utilizzate in altri lavori [1, 8, 12, 13, 18], che impongono tali vincoli a livello cinematico. Nell'approccio presentato in questo lavoro la condizione di VMD implica un leggero mixing fra il fotone e il campo dei mesoni vettoriali; mixing che però non rende massivo il fotone, e risulta inoltre molto piccolo: non modifica quindi sostanzialmente i risultati fisici.

Considerando le anomalie chirali si nota poi subito che, perché l'ipotesi di VMD sia soddisfatta, il funzionale di Wess–Zumino (cioè il funzionale che dovrebbe tener conto delle anomalie nella teoria fenomenologica, e che, nella costruzione originale [34, 24] dipende solo dai campi di gauge e dai campi dei bosoni di Goldstone, identificabili coi mesoni pseudoscalari fondamentali) deve essere modificato con l'introduzione di termini che dipendono anche dai mesoni vettoriali. Il nuovo funzionale potrebbe essere costruito termine a termine; in questo lavoro proponiamo però un approccio differente: la costruzione di Mañes, Stora e Zumino [25], basata sull'approccio coomologico al problema delle anomalie e studiata nella prima parte del capitolo 5, porta ad un funzionale che dipende, oltre che dai mesoni pseudoscalari e dai campi di gauge A, da un terzo campo A_0 parametrizzato da una 1–forma a valori nell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$; inoltre la dipendenza è, in un qualche modo, "simmetrica" in A e A_0: abbiamo quindi studiato la possibilità di identificare i mesoni vettoriali con la 1–forma di background A_0 (avendo in mente che la versione "forte" della VMD corrisponde a sostituire A con $A + g\rho$), osservando che il funzionale così ottenuto è compatibile sia con l'ipotesi di Vector Meson Dominance che con le anomalie chirali.

Nel resto del lavoro abbiamo poi studiato le conseguenze fenomenologiche dell'utilizzo di un funzionale di Wess–Zumino modificato nel modo discusso poco sopra: in particolare abbiamo utilizzato l'azione effettiva che si ottiene con questo metodo per studiare i due decadimenti principali del mesone ω, cioè i processi $\omega \to \pi^+\pi^-\pi^0$ e $\omega \to \pi^0\gamma$. I risultati che si ottengono sono compatibili con i dati sperimentali (l'errore che si commette è compatibile con quello del $\sim 10\%$ atteso per tutte gli approcci fenomenologici basate sull'ipotesi di PCAC [17]), anche se risulta una leggera sovrastima del decadimento $\omega \to \pi^+\pi^-\pi^0$, forse legata all'ipotesi di massa zero per i quark leggeri (che renderebbe massless i mesoni pseudoscalari fondamentali).

APPENDICE A

Richiami di geometria differenziale

Questa appendice è dedicata ad un breve richiamo di alcuni strumenti di geometria differenziali utilizzati nel lavoro. Prima di tutto introdurremo le forme differenziali a valori in un'algebra di Lie e le classi caratteristiche; nella seconda parte discuteremo invece brevemente i fibrati associati e le derivate covarianti.

A.1 Forme differenziali e polinomi invarianti

In questa sezione vogliamo richiamare brevemente la struttura delle forme differenziali a valori in un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$; lo spazio di tali forme differenziali su una varietà M è dato da $\bigwedge(M, \mathfrak{g}) \equiv \bigwedge^*(M) \otimes \mathfrak{g}$. Analogamente al caso di forme a valori in $\mathbb{R}$, vogliamo definire un prodotto fra forme differenziali; in realtà si possono definire due prodotti: siano $\Omega \in \bigwedge^p(M, \mathfrak{g})$ e $\Psi \in \bigwedge^q(M, \mathfrak{g})$ due generatori di $\bigwedge^*(M, \mathfrak{g})$, dati da $\Omega = \omega \otimes X$ e $\Psi = \psi \otimes Y$, allora possiamo dare le seguenti definizioni

Definizione A.1. *Definiamo* prodotto esterno *di Ω e Ψ la forma differenziale $\Omega \wedge \Psi \in \bigwedge^{p+q}(M, \mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$ data da:*

$$\Omega \wedge \Psi = (\omega \wedge \psi) \otimes (X \times Y).$$

Definizione A.2. *Definiamo* commutatore *di Ω e Ψ la forma differenziale $[\Omega, \Psi] \in \bigwedge^{p+q}(M, \mathfrak{g})$ data da:*

$$[\Omega, \Psi] = (\omega \wedge \psi) \otimes [X, Y].$$

Le definizioni precedenti si estendono per linearità a $\bigwedge^*(M,\mathfrak{g})$. Enunciamo di seguito alcune proprietà utili del commutatore fra forme differenziali:

Proposizione A.3. *Siano* $\Omega \in \bigwedge^p(M,\mathfrak{g})$, $\Psi \in \bigwedge^q(M,\mathfrak{g})$, $\Phi \in \bigwedge^r(M,\mathfrak{g})$. *Allora:*

(i) $[\Omega,\Psi] = (-1)^{pq+1}[\Psi,\Omega]$

(ii) $[\Omega,[\Psi,\Phi]] = [[\Omega,\Psi],\Phi] + (-1)^{pq}[\Psi,[\Omega,\Phi]]$ *(*identità di Jacobi*)*

In particolare se Ω *e* Ψ *sono due 1–forme e* $v,w \in TM$ *allora:*

(iii) $[\Omega,\Phi](v,w) = [\Omega(v),\Psi(w)] - [\Omega(w),\Psi(v)]$

(iv) $[\Omega,\Omega](v,w) = 2[\Omega(v),\Omega(w)]$.

Anche per le forme differenziali a valori in un'algebra di Lie si può definire un differenziale esterno; la definizione è identica al caso di forme a valori in $\mathbb{R}$ ed è dato dall'azione sui generatori: $d(\omega \otimes X) = d\omega \otimes X$.

Omomorfismo di Chern–Weil e classi caratteristiche

In generale saremo interessati a funzionali a valori in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$. Quindi dobbiamo considerare le mappe da $\mathfrak{g}^n \to \mathbb{R},\mathbb{C}$; in più ci possiamo restringere alle mappe (multi)lineari. Diamo allora la seguente definizione:

Definizione A.4. *Definiamo* $I^k(G)$ *l'insieme dei funzionali* k*–lineari* $\varphi : \mathfrak{g}\times\ldots\times\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ *simmetrici e* Ad*–invarianti. Poniamo inoltre*

$$I(G) = \sum_{k\in\mathbb{N}} I^k(G).$$

$I(G)$ è uno spazio vettoriale, su cui si può mettere una struttura di algebra commutativa complessa, definendo il prodotto nel modo seguente[1]: dati $f \in I^k(G)$, $g \in I^h(G)$,

$$f \cdot g(X_1,\ldots,X_{k+h}) \equiv \sum_{\sigma\in\Sigma_{k,h}} f(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(k)})g(X_{\sigma(k+1)},\ldots,X_{\sigma(k+h)})$$

Vogliamo estendere questa struttura alle forme differenziali: possiamo definire un omomorfismo da $I(G)$ in $H_{\mathrm{dR}}(M)$ (*omomorfismo di Weil*). Prima di tutto date k

[1] Con $\Sigma_{h,k}$ indichiamo gli (h,k)–mescolamenti, cioè le permutazioni di $h+k$ elementi tali che gli insiemi di indici $[1,\ldots,h]$ e $[h+1,\ldots,k]$ non siano mandati in se stessi.

forme $\omega_1, \ldots, \omega_k$ a valori in $\mathfrak{g}$, di gradi $s_1, \ldots, s_k$, e preso $f \in I^k(G)$ definiamo:

$$f(\omega_1, \ldots, \omega_k)(v_1, \ldots, v_{s_1+\ldots+s_k}) \equiv \sum_{\sigma \in \Sigma_{s_1,\ldots,s_k}} \varepsilon(\sigma) f\left(\omega_1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(s_1)}), \ldots\right)$$

per $v_1, \ldots v_{s_1+\ldots+s_k}$ campi vettoriali su M. Otteniamo così una $(s_1 + \ldots + s_k)$–forma su M; inoltre, se le ω_i trasformano secondo la rappresentazione aggiunta, abbiamo una forma G–invariante.

Consideriamo ora una forma A associata ad una connessione su un fibrato principale $P(M, G)$ e la sua forma di curvatura F. Allora $\Omega_f \equiv f(F, \ldots, F)$ è una $2k$–forma su M a valori in $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) e:

Proposizione A.5 (Omomorfismo di Chern–Weil)**.** *Ω_f è una forma chiusa; inoltre la sua classe di coomologia $w(f) \equiv [\Omega_f] \in H^{2k}_{\mathrm{dR}}(M)$ non dipende dalla scelta della connessione su P e $w : I(G) \to H_{dR}(M)$ è un omomorfismo di algebre.*

Definizione A.6. *Le classi di coomologia così ottenute si dicono* classi caratteristiche *del fibrato P.*

Un'ultima nota prima di passare oltre: nel corso del lavoro abbiamo sempre parlato di polinomi simmetrici, non di forme multilineari; lavorare con polinomi non è meno generale, infatti:

Proposizione A.7. *L'algebra $I(G)$ dei funzionali multilineari simmetrici e* Ad*–invarianti su $\mathfrak{g}$ è isomorfa all'algebra delle funzioni polinomiali* Ad*–invarianti su $\mathfrak{g}$.*

Forma di Chern–Simons

Sia A una forma di connessione su un fibrato P; indichiamo con F la sua forma di curvatura. Per $t \in [0, 1]$ definiamo:

$$F_t \equiv t dA + \frac{1}{2} t^2 [A, A], \qquad D_t \cdot \equiv d \cdot + t[A, \cdot].$$

Preso $f \in I^k(G)$ possiamo definire la *trasgressione* di $f(F, \ldots, F)$ come:

$$T f(A) \equiv k \int_0^1 dt \; f(A, F_t, \ldots, F_t).$$

Vale: $dT f(A) = f(F_A, \ldots, F_A)$.

Definizione A.8. *La $(2k-1)$–forma $T f(A)$ è detta* forma di Chern–Simons.

A.2 Fibrati associati e derivata covariante

Sia P un fibrato G–principale con base X, dove G è un gruppo di Lie compatto connesso semisemplice. Sia N una varietà differenziabile sulla quale è definita un'azione liscia $T : G \times N \to N$ di G. Sia inoltre ω una connessione su P.

Definizione A.1. *Si dice* fibrato associato *a P con fibra N il fibrato*[2] $E = (P \times N)/G$, *dove l'azione di G su $P \times N$ è data da:*

$$g : (u, n) \mapsto (ug, T(g^{-1})n)$$

Consideriamo ora i fibrati associati $E = (P \times N)/G$ e $E_t = (P \times TN)/G$ (dove l'azione di G su TN è data semplicemente da T_*). Notiamo che le sezioni di E, $\varphi : X \to E$ sono in corrispondenza biunivoca con le mappe G–equivarianti $\overline{\varphi} : P \to N$ ($\overline{\varphi}(pg) = T(g^{-1})\overline{\varphi}(p)$) in modo che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\mathrm{id}\times\overline{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"'] & P \times N \arrow[d, "\pi_E"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & E \end{tikzcd}$$

La stessa identificazione si applica ai fibrati tangenti. Poniamo ora $\nabla\overline{\varphi} \equiv \mathrm{hor} \circ d\overline{\varphi} : TP \to TN$; possiamo dare la definizione di derivata covariante:

Definizione A.2. *Si definisce* derivata covariante *di una sezione $\varphi : X \to E$ l'unica 1–forma $\nabla\varphi : TX \to E_t$ che corrisponde (nel senso visto poco sopra) a $\nabla\overline{\varphi}$.*

Sia ora $q : X \to P$ una sezione di P; questa induce [19] una banalizzazione η di P, a cui sono associate banalizzazioni η_E, η_{E_t} di E ed E_t. Possiamo allora scrivere

$$\varphi(x) = \eta_E(x, \phi(x)) \qquad \text{con } \phi(x) = \varphi(q(x)) \tag{A.1}$$

Posto ora $\Gamma_{q(x)} = (q^*\omega)_x$ e preso $Y \in T_xX$ possiamo scrivere:

$$\nabla\varphi_x(Y) = \eta_{E_t}(x, \nabla\phi_x(Y))$$

dove, per quanto detto sopra,

$$\nabla\phi_x(Y) = \nabla\overline{\varphi}_{q(x)}(\mathrm{hor}\ q_*Y) = d\overline{\varphi}_{q(x)}(q_*Y) - d\overline{\varphi}_{q(x)}(\mathrm{ver}\ q_*Y)$$

[2] Per i dettagli sulla struttura differenziale e la costruzione delle banalizzazioni locali si può vedere [19].

che, sfruttando le proprietà di trasformazione della connessione sotto l'azione del gruppo, si può riscrivere nella forma:

$$\nabla\phi_x(Y) = d\phi_x(Y) + (T_{\phi(x)})_* \Gamma_{q(x)}(Y). \tag{A.2}$$

Come ultima cosa scriviamo le leggi di trasformazione della derivata covariante ∇ sotto una trasformazione di gauge (cioè sotto una diversa scelta della banalizzazione del fibrato principale); sia quindi $q'(x) = q(x)g(x)$ una nuova sezione di P e η'_{E_t} la relativa banalizzazione di E_t. Allora, per $Y \in T_xX$,

$$\nabla\varphi_x(Y) = \eta'_{E_t}(x, \nabla\phi'_x(Y))$$

dove

$$\nabla\phi'_x(Y) = (T(g^{-1}(x)))_* \nabla\phi_x(Y)$$

che giustifica il fatto che ∇ sia detta derivata *covariante*.

APPENDICE B

Note sull'interpretazione geometrica della simmetria BRS

In questa Appendice vogliamo discutere un po' più in dettaglio di quanto fatto nel capitolo 3 alcuni strumenti utilizzati per studiare la coomologia BRS e per ricavare le descent equations (3.11). Come visto nel capitolo 3 il problema del calcolo delle anomalie si può ridurre ad un problema coomologico, legato alla coomologia BRS. Per legare le considerazioni algebriche alle anomalie è opportuno dare un'interpretazione geometrica agli oggetti utilizzati. Per fare questo cominciamo considerando una famiglia di 1–forme di connessione A_λ che dipendono da λ in modo liscio. Su di essa, in accordo con quanto visto nel capitolo 3, definiamo tre operatori: d, d_λ e l_λ; d è l'usuale differenziale esterno e d_λ è definito da

$$d_\lambda \equiv d\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda},$$

cioè è il differenziale relativo allo spazio dei parametri; vogliamo poi definire l_λ in modo che soddisfi le seguenti relazioni (cioè le (3.4)):

$$\begin{aligned} d^2 = d_\lambda^2 = dd_\lambda + d_\lambda d = 0 \\ l_\lambda d - dl_\lambda = d_\lambda \\ d_\lambda l_\lambda - l_\lambda d_\lambda = 0 \end{aligned} \tag{B.1}$$

Quindi, se F_λ è la famiglia di forme di curvatura associata ad A_λ, l'azione di l_λ sarà data [25] da:

$$l_\lambda F_\lambda = d_\lambda A_\lambda, \qquad l_\lambda A_\lambda = l_\lambda d_\lambda A_\lambda = l_\lambda d_\lambda A_\lambda = 0.$$

Successivamente estenderemo l'azione di questi operatori introducendo i campi di ghost, per ottenere l'analogo della simmetria BRS. Prima di fare questo osserviamo che dalle (B.1) si ottengono importanti relazioni; iniziamo osservando che le (B.1) implicano che, per un qualsiasi polinomio $p(x)$, abbiamo:

$$[p(l_\lambda), d] = d_\lambda p'(l_\lambda) = p'(l_\lambda) d_\lambda,$$

da cui possiamo ottenere, usando l'espansione in serie dell'esponenziale,

$$e^{l_\lambda} d - d e^{l_\lambda} = d_\lambda e^{l_\lambda} = e^{l_\lambda} d_\lambda \tag{B.2}$$

Applicando ora la (B.2) ad un polinomio Q in $A_\lambda, F_\lambda, d_\lambda A_\lambda, d_\lambda F_\lambda$ (e anche a quelli che dipendono dai campi di ghost, dato che l'azione su essi, che sarà definita più avanti, è coerente con le (B.1)) otteniamo, espandendo in serie l'esponenziale, la *formula di omotopia estesa di Cartan*:

$$d_\lambda \frac{l_\lambda^p}{p!} Q = \frac{l_\lambda^{p+1}}{(p+1)!} dQ - d \frac{l_\lambda^{p+1}}{(p+1)!} Q. \tag{B.3}$$

Supponiamo ora che lo spazio in cui variano i parametri λ sia una varietà con bordo T; allora usando Stokes abbiamo la versione integrale della (B.3):

$$\int_{\partial T} \frac{l_\lambda^p}{p!} Q = (-1)^p d \int_T \frac{l_\lambda^{p+1}}{(p+1)!} Q \tag{B.4}$$

Per estendere l'azione degli operatori d_λ e l_λ ai ghost possiamo considerare la seguente famiglia di forme di connessione:

$$A_\lambda(x) = g^{-1}(x,\lambda) A(x) g(x,\lambda) + g^{-1}(x,\lambda) d g(x,\lambda)$$

e il ghost di Faddeev–Popov definito come

$$v_\lambda(x) = g^{-1}(x,\lambda) d_\lambda g(x,\lambda).$$

L'azione degli operatori è data, in accordo con le (B.1) e le trasformazioni BRS, da:

$$\begin{array}{ll} dA_\lambda = F_\lambda - \frac{1}{2}[A_\lambda, A_\lambda], & dF_\lambda = [A_\lambda, F_\lambda], \\ d_\lambda v_\lambda = -d_\lambda v_\lambda - [A_\lambda, v_\lambda], & d_\lambda v_\lambda = -\frac{1}{2}[v_\lambda, v_\lambda] \\ d_\lambda F_\lambda = -[v_\lambda, F_\lambda] & \end{array}$$

Prima di concludere questa Appendice precisiamo il motivo per cui nel capitolo 3 l'operatore l_λ è stato definito "derivazione omotopica": come si può vedere dalle (B.1) l_λ aumenta di 1 il grado in $d\lambda$ e diminuisce di 1 quello in d; inoltre, se supponiamo che lo spazio dei parametri λ sia $[0,1]$, possiamo integrare la relazione di commutazione fra l_λ e d ottenendo:

$$\left(\int_0^1 d\lambda\, l_\lambda\right) d - d \int_0^1 d\lambda\, l_\lambda = \int_0^1 d_\lambda,$$

cioè $k \equiv \displaystyle\int_0^1 d\lambda\, l_\lambda$ [36] è un'operatore di omotopia per la coomologia di de Rham.

Bibliografia

[1] M. Bando, T. Kugo e K. Yamawaki, *Nonlinear realizations and hidden local symmetries*, Phys. Rep. **164**, 217 (1988)

[2] W. A. Bardeen, *Anomalous Ward identities in spinor fields theories*, Phys. Rev. **184**, 1848 (1969)

[3] L. Bonora e P. Cotta–Ramusino, *Some remarks on BRS transformations, anomalies and the cohomology of the Lie algebra of the group of gauge transformations*, Comm. Math. Phys. **87**, 589 (1983)

[4] C. G. Callan, S. Coleman, J. Wess e B. Zumino, *Structure of phenomenological Lagrangians. II*, Phys. Rev. **177**, 2247 (1969)

[5] S. Coleman, J. Wess e B. Zumino, *Structure of phenomenological Lagrangians. I*, Phys. Rev. **177**, 2239 (1969)

[6] M. Dubois–Violette, M. Talon e C. M. Viallet, *B.R.S. algebras. Analysis of the consistency equations in gauge theory*, Comm. Math. Phys. **102**, 105 (1985)

[7] G. Ecker, J. Gasser, H. Leutwyler, A. Pich, E. De Rafael, *Chiral Lagrangians for massive spin–1 fields*, Phys. Lett. B **223**, 425 (1989)

[8] T. Fujiwara, T. Kugo, H. Tearo, S. Uehara e K. Yamawaki, *Non abelian anomaly and vector mesons as dynamical gauge bosons of hidden local symmetries*, Prog. Theor. Phys. **73**, 926 (1985)

[9] M. L. Goldberger e S. B. Treiman, *Decay of the Pi meson*, Phys. Rev. **110**, 1178 (1958)

[10] E. Guadagnini, K. Konishi, M. Mintchev, *Non–abelian chiral anomalies in supersymmetric gauge theories*, Phys. Lett. B **157**, 37 (1985)

[11] R. Haag, *Quantum field theories with composite particles and asymptotic conditions*, Phys. Rev. **112**, 669 (1958)

[12] M. Harada e K. Yamawaki, *Hidden local symmetry at loop. A new perspective of composite gauge bosons and chiral phase transition*, Phys. Rep. **381**, 1 (2003)

[13] J. A. Harvey, C. T. Hill e R. J. Hill, *Standard Model gauging of the Wess–Zumino–Witten term: anomalies, global currents and pseudo–Chern–Simons interactions*, Phys. Rev. D **77**.085017 (2008)

[14] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press (2002)

[15] G. Hochschild e J–P. Serre, *Cohomology of Lie algebras*, Ann. Math. **57**, 591 (1953)

[16] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer (1972)

[17] S. B. Treiman, R. Jackiw, B. Zumino e E. Witten, *Current algebra and anomalies*, World Scientific (1985)
(in particolare la review di Jackiw, *Field theoretic investigations in current algebra*)

[18] O. Kaymackalan, S. Rajeev e J. Schechter, *Non–abelian anomaly and vector–meson decays*, Phys. Rev. D **30**, 594 (1984)

[19] S. Kobayashi e K. Nomidzu, *Foundations of differential geometry*, vol. 1, Interscience, New York (1963)

[20] S. Kobayashi e K. Nomidzu, *Foundations of differential geometry*, vol. 2, Interscience, New York (1969)

[21] N. M. Kroll, T. D. Lee e B. Zumino, *Neutral vector mesons and the hadronic electromagnetic current*, Phys. Rev. **157**, 1376 (1967)

[22] T. D. Lee e B. Zumino, *Field–current identities and algebra of fields*, Phys. Rev. **163**, 1667 (1967)

[23] J. Madore, *A classification of SU_3 magnetic monopoles*, Comm. Math. Phys. **56**, 115 (1977)

[24] J. L. Mañes, *Differential geometric construction of the gauged Wess–Zumino action*, Nucl. Phys. B **250**, 169 (1985)

[25] J. L. Mañes, R. Stora e B. Zumino, *Algebraic study of chiral anomalies*, Comm. Math. Phys. **102**, 157 (1985)

[26] L. Nikolova e V. A. Rizov, *Geometrical approach to the reduction of gauge theories with spontaneously broken symmetry*, Rep. Math. Phys. **20**, 287 (1984)

[27] J. Schwinger, *On gauge invariance and vacuum polarization*, Phys. Rev. **82**, 664 (1951)

[28] D. G. Sutherland, *Current algebra and some non–strong meson decays*, Nucl. Phys. B **2**, 433 (1967)

[29] V. S. Varadarajan, *Lie Groups, Lie algebras, and their representations*, Springer (2004)

[30] S. Weinberg, *Dynamical approach to current algebra*, Phys. Rev. Lett. **18**, 188 (1967)

[31] S. Weinberg, *Nonlinear realizations of chiral symmetry*, Phys. Rev. **166**, 1568 (1968)

[32] S. Weinberg, *Phenomenological Lagrangians*, Physica A **96**, 327 (1979)

[33] E. Witten, *Global aspects of current algebra*, Nucl. Phys. B **223**, 422 (1983)

[34] J. Wess e B. Zumino, *Consequences of anomalous Ward identities*, Phys. Lett. B **37**, 95 (1971)

[35] W.–M. Yao et al., Journal of Physics G **33**, 1 (2006)

[36] B. Zumino, *Chiral anomalies and differential geometry*, in *Relativity, Groups and Topology* (Les Houches, 1983), edito da B. S. DeWitt e R. Stora, North–Holland, Amsterdam (1984)

[37] B. Zumino, *Cohomology of gauge groups: cocycles and Schwinger terms*, Nucl. Phys. B **253**, 477 (1985)

[38] B. Zumino, Y.–S. Wu e A. Zee, *Chiral anomalies, higher dimensions, and differential geometry*, Nucl. Phys. B **239**, 477 (1984)